Елементи лінійної алгебри

Варіант 13

1) Розв'яжіть систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Запишемо основний визначник та обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - (1\cdot2\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot1\cdot1) =$$

$$= 8 + 1 + 1 - (2 + 2 + 2) = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

Основний визначник ~~більше~~ не дорівнює 0, тому отримаємо єдине рішення.

Запишемо та обрахуємо додаткові визначники

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot2\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - (1\cdot2\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot1) =$$

$$= 4 + 1 + 1 - (2 + 1 + 2) = 6 - 5 = 1$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2\cdot1\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - (1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot1\cdot1) =$$

$$= 4 + 1 + 1 - (1 + 2 + 2) = 6 - 5 = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2\cdot2\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 - (1\cdot2\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot1\cdot1) =$$

$$= 4 + 1 + 1 - (2 + 2 + 1) = 6 - 5 = 1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{4}$$

Отже розв'язком системи лінійних рівнянь буде $(x_1; x_2; x_3) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

Проведемо перевірку правильності розв'язку підставивши значення x_1, x_2 та x_3 в систему.

$$\begin{cases} 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\ \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Отже знайдені розв'язки системи є правильними.

2) Обчисліть визначник четвертого порядку

Множимо 3 ~~ст~~ рядок на $-\frac{2}{3}$ та додаємо до 4 рядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

Множимо 2 рядок на $-\frac{3}{4}$ та додаємо до 3 рядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{4} \\ 0 & \frac{8}{3} & 3 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

Множимо 1 рядок на $-\frac{4}{5}$ та додаємо до 2 рядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{4} \\ 0 & \frac{8}{3} & 3 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

Множимо 3 рядок на $-\frac{16}{3}$ та додамо до 4 рядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & -5 & -17 \end{vmatrix} =$$

Множимо 2 рядок на $\frac{5}{12}$ ~~а~~ та додамо до 3 рядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -17 \end{vmatrix} =$$

Множимо 3 рядок на $\frac{15}{4}$ та додамо до 4 рядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{4} \end{vmatrix}$$

Для того щоб обчислити визначник необхідно помножити усі числа діагоналі

$$\Delta = \cancel{5}\cdot\left(-\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{5}}\right)\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{23}{\cancel{4}}\right) = 2\cdot 23 = 46$$

За методом пониження порядку:

$\cancel{\Delta =}$

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

обчислимо визначники матриць 3 на 3

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right| = 4 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - (4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 3) =$$

$$= 36 + 48 + 20 - (24 + 80 + 18) = 104 - 122 = -18$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right| = 5 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 - (2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 3) =$$

$$= 45 + 24 + 30 - (12 + 100 + 27) = 99 - 139 = -40$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 4 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right| = 5 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 4) =$$

$$= 30 + 32 + 24 - (8 + 80 + 36) = 86 - 124 = -38$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right| = 5 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - (2 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 4) =$$

$$= 50 + 24 + 36 - (12 + 60 + 60) = 110 - 132 = -22$$

$$\Delta = (-4) \cdot (-18) + 2 \cdot (-40) - 2 \cdot (-38) - 22 =$$

$$= 72 - 80 + 76 - 22 = -8 + 76 - 22 = 76 - 30 = 46$$