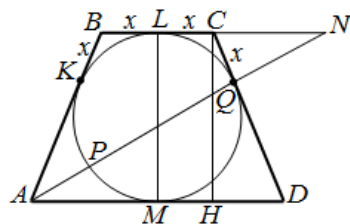


Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности. Сторона CD касается этой окружности в точке Q , а отрезок AQ пересекает окружность в точке P . Найти радиус окружности, если известно, что $AP=2$, $PQ=7$.



K, L, M – точки касания окружности со сторонами AB , BC и AD соответственно. По теореме о касательных из одной точки $AK = AM$, $DM = MQ$, $BK = BL$, $CL = CQ$. И т.к. $AM = MD$, $BL = CL$, то $AK = AM = DM = DQ$, $BK = BL = CL = CQ = x$, $AD = 2DQ$.

$$AQ = AP + PQ = 2 + 7 = 9.$$

По теореме о касательной и секущей $AM^2 = AP \cdot AQ = 2 \cdot 9 = 18$.

$$AM = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = DQ, \quad AD = 6\sqrt{2}.$$

CH – высота трапеции. Ясно, что $LM = CH$, и LM – диаметр окружности.

Продолжим BC за точку C , а AQ за точку Q до их пересечения в точке N . Из

подобия треугольников AQD и NQC $CN = 2CQ = 2x$, $\frac{NQ}{AQ} = \frac{CQ}{DQ}$,

$$NQ = \frac{AQ \cdot CQ}{DQ} = \frac{9x}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}x}{2}.$$

$$LN = CL + CN = 3x. \quad NP = NQ + PQ = \frac{3\sqrt{2}x}{2} + 7$$

По теореме о касательной и секущей $LN^2 = NQ \cdot NP$ или

$$9x^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}x \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}x + 7 \right), \quad 9x^2 = \frac{9}{2}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{2}x, \quad 9x = 21\sqrt{2}, \quad x = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

$$CD = CQ + DQ = \frac{7\sqrt{2}}{3} + 3\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}, \quad MH = LC = \frac{7\sqrt{2}}{3},$$

$$HD = MD - MH = 3\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad CH = \sqrt{CD^2 - HD^2},$$

$$CH = \sqrt{\frac{256 \cdot 2 - 4 \cdot 2}{9}} = \sqrt{\frac{252 \cdot 2}{9}} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

$$r = \frac{CH}{2} = \sqrt{14} \text{ – это радиус вписанной в трапецию окружности.}$$