

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

Варіант № 15

2.1. Визначити ймовірності подій за класичною моделлю

2.1.15. Сім літаків, серед яких два В-737, прибули в аеропорт і були розміщені випадковим способом на 10 стоянках, розташованих в один ряд. Знайти ймовірність того, що літаки В-737 зайняли сусідні стоянки.

Рішення.

Будемо випадково відбирати 7 стоянок із 10 для розстановки 7 літаків. Побудуємо класичну модель досліду, в якому кожен випадок – це один із варіантів розподілу стоянок. Загальне число n випадків у такій моделі дорівнює числу різних комбінацій із 7 по 10 помножене на число перестановок 7 літаків:

$$n = 7!C_{10}^7 = 7! \cdot \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10!}{3!}.$$

Серед знайденого числа способів відбору стоянок знайдемо число варіантів m , сприятливих події A . Це такі варіанти, у яких 2 літаки В-737 стоять на сусідніх стоянках, а решта 5 – серед будь-яких місць на 8 стоянках, що залишились. Число m знайдемо за комбінаторним принципом добутку (враховуємо перестановки):

$$m = 2!5!9C_5^8 = 2! \cdot 5! \cdot 9 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{2! \cdot 9!}{3!}.$$

Тоді ймовірність того, що літаки В-737 зайняли сусідні стоянки, обчислюється за класичною формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 9!}{3!} \cdot \frac{3!}{10!} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Відповідь: 0,2.

Завдання 2. Імовірності суми й добутку подій

2.2.15. З аеропорту протягом доби виконуються 3 рейси. Імовірність повного комерційного завантаження для першого рейса дорівнює 0,95; для другого – 0,9; для третього – 0,85. Знайти ймовірність того, що з повним комерційним завантаженням буде виконано хоча б один рейс.

Рішення.

Позначимо через A подію - з повним комерційним завантаженням буде виконано хоча б один рейс. Тоді протилежна подія – всі три рейси вийшли без повного комерційного завантаження, її ймовірність:

$$P(\bar{A}) = (1 - p_1) * (1 - p_2) * (1 - p_3) = 0.05 * 0.1 * 0.15 = 0.00075 .$$

Ймовірність того, що з повним комерційним завантаженням буде виконано хоча б один рейс:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.00075 = 0.99925.$$

Відповідь. 0,99925.

Завдання 3. Задана функція розподілу неперервної випадкової величини ξ .

Знайти коефіцієнт A ; записати щільність розподілу $f_{\xi}(x)$; обчислити числові характеристики $M\xi$, $D\xi$ а також ймовірність події $\{\alpha \leq \xi < \beta\}$. Зробити креслення функції розподілу та щільності розподілу.

2.3.15	$\begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ A\left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}\right), & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$	-1	1
--------	---	----	---

Рішення.

а) Функція розподілу випадкової величини ξ неперервна, тому $\lim_{x \rightarrow 2-0} F_{\xi}(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} F_{\xi}(x)$. Звідси маємо $A=1/2$. Отже, графік функції розподілу має вигляд (Рис. 2.1):

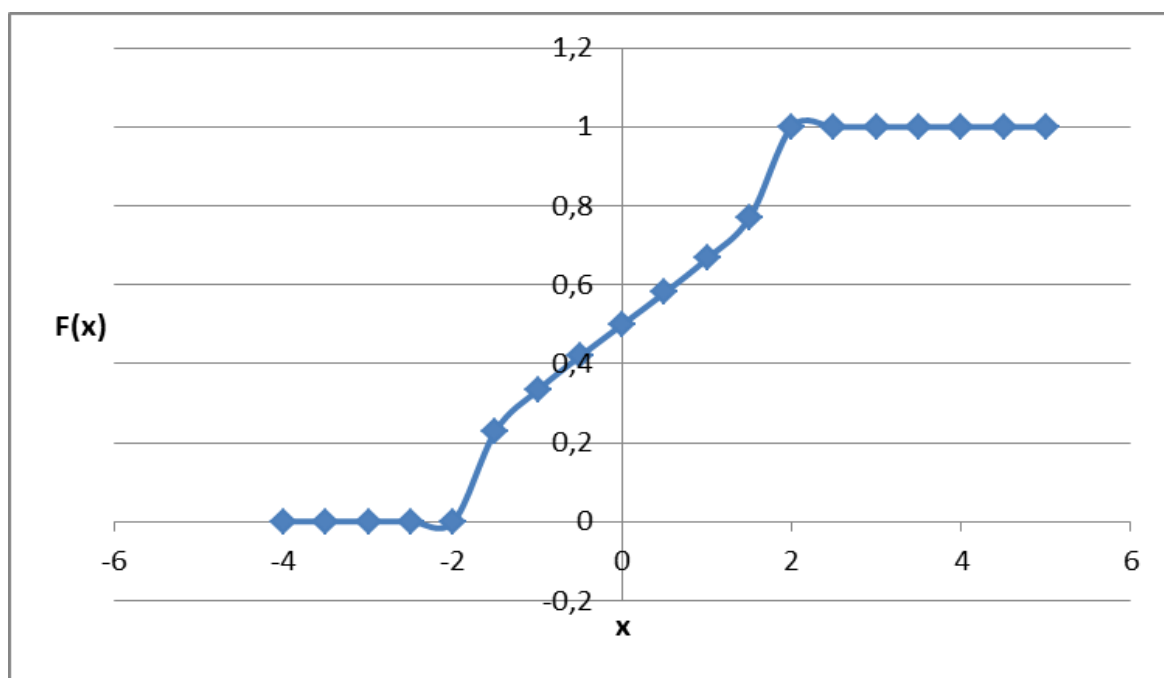


Рис.2.1

б) $f_{\xi}(x)$ знайдемо за властивістю 2):

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, x > 2, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & -2 < x \leq 2. \end{cases}$$

Графік щільності розподілу наведений на рис. 2.2:

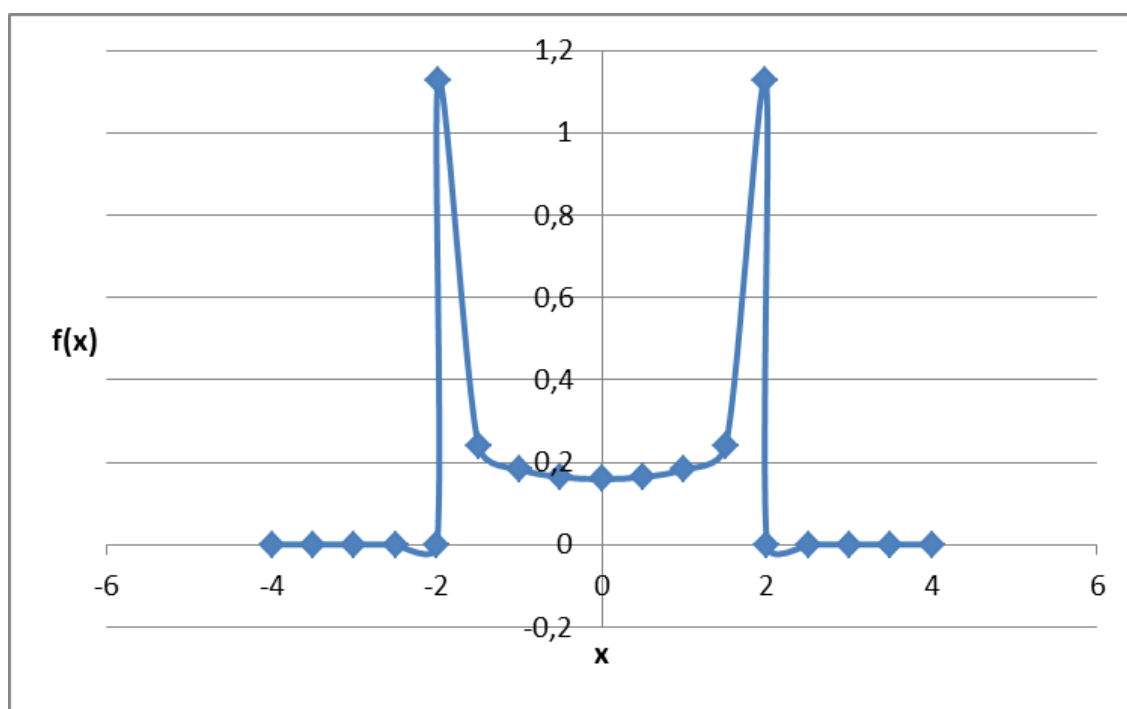


Рис. 2.2

в) За формулами обчислимо числові характеристики:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{x}{\pi \sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{4-x^2} \Big|_{-2}^2 = 0.$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (M\xi)^2 = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{\pi \sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} x^2 \arcsin(x/2) \Big|_{-2}^2 = 4.$$

г) Одержимо :

$$P\{-1 \leq \xi \leq 1\} = F_{\xi}(1) - F_{\xi}(-1) = 0.666 - 0.333 \approx 0,333.$$

Відповідь: а) $A=1/2$; б) $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, x > 2, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{4-x^2}}, & -2 < x \leq 2. \end{cases}$

в) $M\xi = 0$, $D\xi = 4$; г) $P\{-1 \leq \xi \leq 1\} = 0,333$.

Завдання 4. Задано інтервальний розподіл частот. Потрібно:

1. Побудувати дискретний розподіл частот і відносних частот.
2. Побудувати полігон відносних частот дискретного розподілу.
3. Знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.
4. Знайти точкові оцінки математичного сподівання і дисперсії генеральної сукупності.

2.4.15	Інтервал	2,4 ÷ 2,6	2,6 ÷ 2,8	2,8 ÷ 3,0	3,0 ÷ 3,2	3,2 ÷ 3,4
	n_i	5	8	9	5	1

Рішення.

1. Побудуємо дискретний розподіл частот і відносних частот.

Обсяг вибірки становить $n = 28$, оскільки вона складається з 28 значень. В якості варіант дискретного розподілу візьмемо середини інтервалів. Порахуємо частоти, з якими варіанти входять у вибірку та запишемо дискретний розподіл частот вибірки:

x_i	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3
n_i	5	8	9	5	1

Знайдемо відносні частоти:

$$w_1 = \frac{5}{28} = 0.179; \quad w_2 = \frac{8}{28} = 0.286; \quad w_3 = \frac{9}{28} = 0.321; \quad w_4 = \frac{5}{28} = 0.179; \quad w_5 = \frac{1}{28} = 0.036.$$

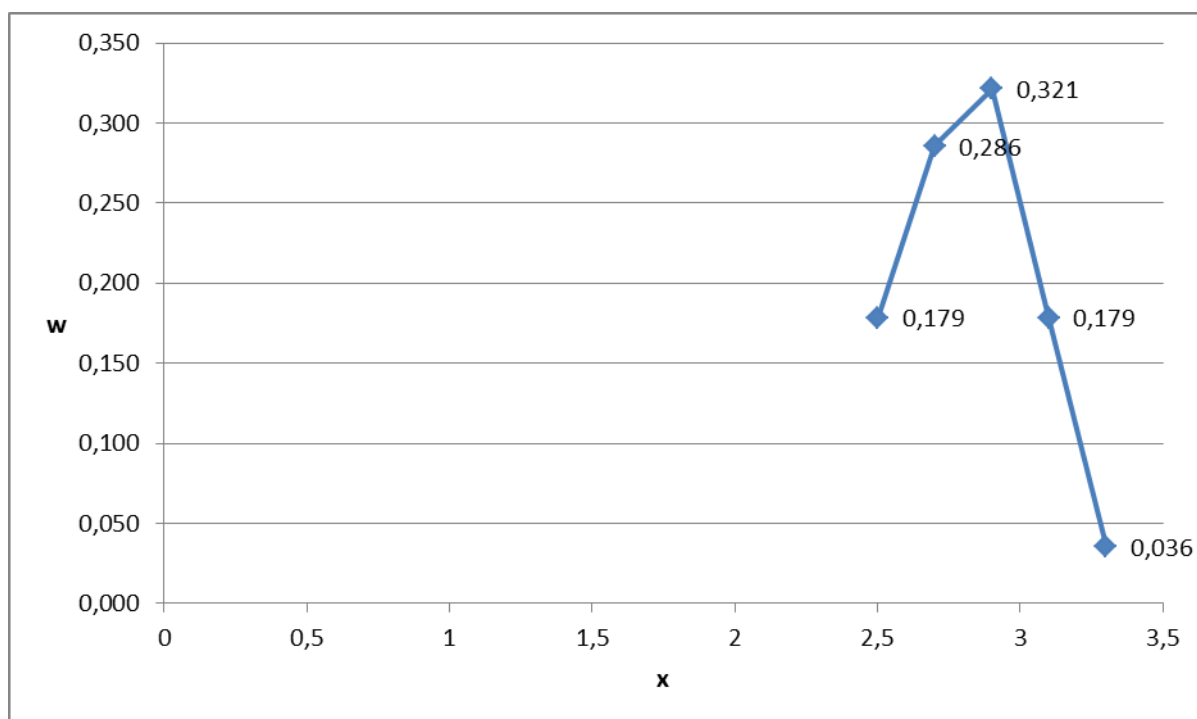
Отже, розподіл відносних частот має вигляд:

x_i	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3
n_i	0,179	0,286	0,321	0,179	0,036

Перевірка: $\sum w_i = 1 \Leftrightarrow 0.179 + 0.286 + 0.321 + 0.179 + 0.036 = 1$

2. Побудуємо полігон відносних частот дискретного розподілу. Для побудови полігону відносних частот скористаємося розподілом відносних частот

На площині $(x_i; w_i)$ зобразимо точки з координатами (2,5; 0,179), (2,7; 0,286), (2,9; 0,321), (3,1; 0,179), (3,3; 0,036) та з'єднаємо їх відрізками. Отримуємо шуканий полігон відносних частот.



3. Знайдемо емпіричну функцію розподілу і побудуємо її графік.

Емпіричну функцію шукаємо за формулою. Обсяг вибірки: $n = 28$.

При $x \leq 2.5$, $n_x = 0$ оскільки найменша варіанта $x_1 = 2.5$ Тому $F^*(x) = 0$ при $x \leq 2.5$.

При $2.5 < x \leq 2.7$ лише варіанта $x_1 = 2.5 < x$ причому $n_x = 5$. Тому $F^*(x) = 5/28 = 0,179$ при $2.5 < x \leq 2.7$.

При $2.7 < x \leq 2.9$ лише варіанти $x_1 = 2.5$ і $x_2 = 2.7 < x$ причому $n_x = 5 + 8$. Тому $F^*(x) = 13/28 = 0,464$ при $2.7 < x \leq 2.9$.

При $2.9 < x \leq 3.1$ лише варіанти $x_1 = 2.5$, $x_2 = 2.7$, $x_3 = 2.9$ менші x причому $n_x = 5 + 8 + 9$. Тому $F^*(x) = 22/28 = 0,786$ при $2.9 < x \leq 3.1$.

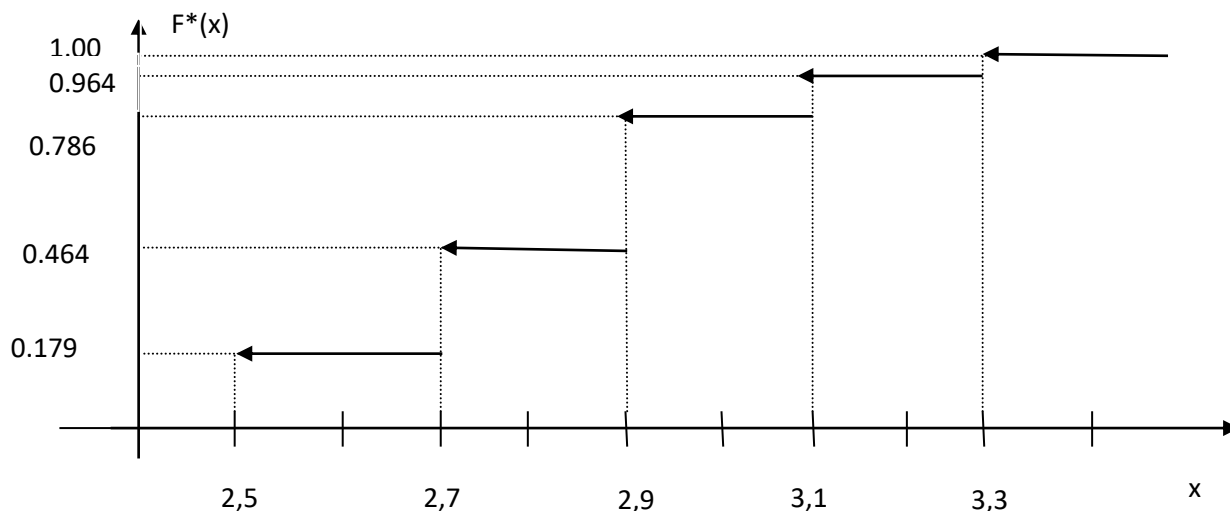
При $3.1 < x \leq 3.3$ лише варіанти $x_1 = 2.5$, $x_2 = 2.7$, $x_3 = 2.9$, $x_4 = 3.1$ менші x причому $n_x = 5 + 8 + 9 + 5$. Тому $F^*(x) = 27/28 = 0,964$ при $3.1 < x \leq 3.3$.

При $x > 3.3$, $n_x = 28$ і отже $F^*(x) = 1,0$

Таким чином емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2.5, \\ 0.179, & \text{при } 2.5 < x \leq 2.7, \\ 0.464, & \text{при } 2.7 < x \leq 2.9, \\ 0.786, & \text{при } 2.9 < x \leq 3.1, \\ 0.964, & \text{при } 3.1 < x \leq 3.3, \\ 1.0, & \text{при } x > 3.3 \end{cases}$$

Побудуємо графік цієї функції.



4. Знайдемо точкові оцінки математичного сподівання і дисперсії генеральної сукупності.

Незмщеною оцінкою генерального середнього є вибіркве середнє, що обчислюється за формулою:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2.5 * 5 + 2.7 * 8 + 2.9 * 9 + 3.1 * 5 + 3.3 * 1}{28} = \frac{79}{28} = 2.82$$

Точковою зміщеною оцінкою $D(X)$ є вибіркова дисперсія D_B , яку обчислимо за формулою:

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{2.5^2 * 5 + 2.7^2 * 8 + 2.9^2 * 9 + 3.1^2 * 5 + 3.3^2 * 1}{28} = \frac{224.2}{28} = 8.007$$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \left(\bar{x}_B \right)^2 = 8.007 - 2.82^2 = 0.055$$

Точковою незміщеною оцінкою $D(X)$ є виправлена вибіркова дисперсія, яку обчислюємо за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{28}{28-1} * 0.055 = 0.057$$

Завдання 5. Знайти оптимальний план перевезень транспортної задачі.

2.5.15.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	V_1	V_2	V_3	V_4	
Q_1	9	8	5	6	370
Q_2	6	10	3	4	240
Q_3	5	6	7	9	390
Потреби	420	190	230	160	

Рішення. Задача закритого типу. Опорний план знайдемо методом мінімального елемента (спочатку заповнюємо клітинки з мінімальною вартістю перевезення і т.д.)

	V_1	V_2	V_3	V_4	Запаси
Q_1	9 30	8 190	5	6 150	370
Q_2	6	10	3 230	4 10	240
Q_3	5 390	6	7	9	390
Потреби	420	190	230	160	1000

Допустимий план знайдено:

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 190 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 230 & 10 \\ 390 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_0 = 5370 \text{ у.о.}$$

Кількість базисних змінних дорівнює $m+n-1 = 6$.

Методом потенціалів перевіряємо допустимий план на оптимальність.

	V_1	V_2	V_3	V_4	α_i
Q_1	9 30 -	8 190	5 5	6 150 +	0
Q_2	7 6 +	6 10	3 230	4 10 -	-2
Q_3	5 390	4 6	1 7	2 9	-4
β_j	9	8	5	6	

$$L_1 = L_0 + \gamma \cdot W$$

$$\gamma = 6 - 7 = -1$$

$$W = 10$$

$$L_1 = 5370 - 1 \cdot 10 = 5360$$

	V_1	V_2	V_3	V_4	α_i
Q_1	9 20 -	8 190	6 5 +	6 160	0
Q_2	6 10 +	5 10	3 230 -	3 4	-3
Q_3	5 390	4 6	2 7	2 9	-4
β_j	9	8	6	6	

$$L_2 = L_1 + \gamma \cdot W$$

$$\gamma = 5 - 6 = -1$$

$$W = 20$$

$$L_1 = 5360 - 1 \cdot 20 = 5340$$

	V_1	V_2	V_3	V_4	α_i
Q_1	8 9	8 190	5 20	6 160	0
Q_2	6 30	6 10	3 210	4 4	-2
Q_3	5 390	4 6	1 7	2 9	-4
β_j	8	8	5	6	

План є оптимальним.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 190 & 200 & 160 \\ 30 & 0 & 210 & 0 \\ 390 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_0 = 5340 y.o.$$

Відповідь:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 190 & 200 & 160 \\ 30 & 0 & 210 & 0 \\ 390 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_0 = 5340 y.o.$$

Література.

1. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979.
2. Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989.
3. Ротарь В. И. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1992.