

7. Продолжение высоты BB_1 треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D . Пусть H точка пересечения высот. Докажите, что $HB_1 = DB_1$. Используя это свойство высоты, решите задачу: Продолжения высот BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E , соответственно. Найти радиус окружности, если $BC = 5$ и $DE = 6$.

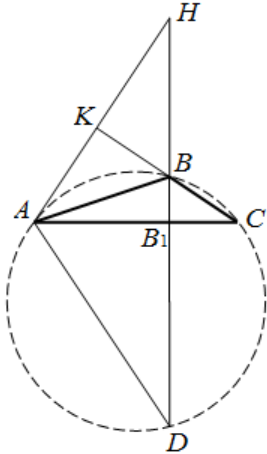


Рис. 1

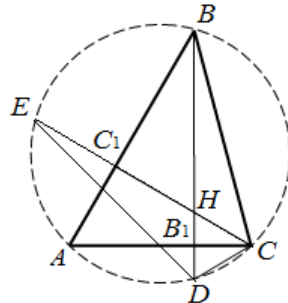


Рис. 2

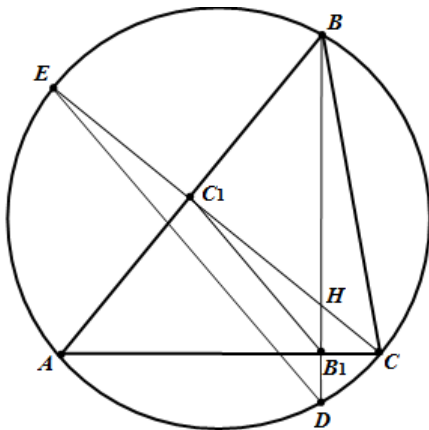
На рис. 1 $\angle ABC$ — тупой, а на рис. 2 — острый.

На рис. 1 AK — высота к стороне BC . AK и BB_1 пересекаются в точке H . $KC \perp AH$, т.е. $\triangle AKC$ — прямоугольный с прямым углом AKC . $B_1H \perp AC \Rightarrow \angle AHB = \angle ACK$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Углы ACB и ADB равны как вписанные углы, опирающиеся

на одну и ту же дугу.

$\angle AHB_1 = \angle ACK \cap \angle ADB = \angle ACK \Rightarrow \angle AHB_1 = \angle ADB$. $\triangle DAH$ — равнобедренный ($AH = AD$). $DH \perp AC$, значит AB_1 — высота и медиана равнобедренного треугольника DAH : $HB_1 = DB_1$.

На рис. 2 CC_1 — высота к AB . $CC_1 \perp AB \cap BD \perp AC \Rightarrow \angle DHC = \angle BAC$, а $\angle BAC = \angle B_1BC$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. И, как и в случае тупого угла, $HB_1 = DB_1$.



Переходим ко второй задаче. По доказанному выше $EC_1 = C_1H$, $HB_1 = B_1D$, т.е. B_1C_1 — средняя линия треугольника EHD $B_1C_1 = \frac{1}{2}DE = 3$.

$\angle AB_1C_1 = \angle ACC_1 + \angle CC_1B_1$ как внешний угол треугольника C_1B_1C . Но $\angle CC_1B_1 = \angle CED$, а т.к. вписанные углы CED и DBC опираются на одну и ту же дугу и поэтому равны, то

$$\angle AB_1C_1 = \angle ACC_1 + \angle DBC.$$

Но $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, значит $\angle AB_1C_1 = \angle ABB_1 + \angle DBC = \angle B$. Т.к. у треугольников AB_1C_1 и ABC угол A — общий и $\angle AB_1C_1 = \angle B$, значит, они подобны по 1-му признаку подобия и $AB_1 : AB = B_1C_1 : BC = 3 : 5 = 0,6$.

Т.к. $AB_1 : AB = \cos A$, то $\cos A = 0,6 \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$.

Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC , то

$$BC = 2R \sin A \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{5}{1,6} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}.$$