ФГОС

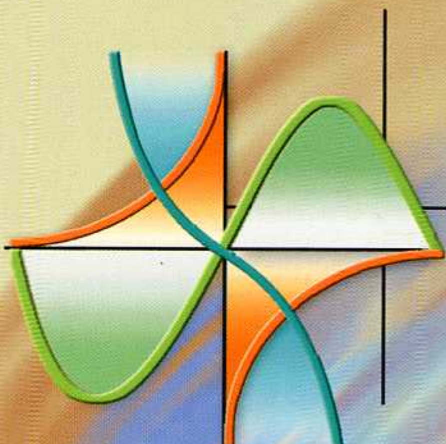
И. Е. ФЕОКТИСТОВ

АЛГЕБРА

8

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

И. Е. ФЕОКТИСТОВ

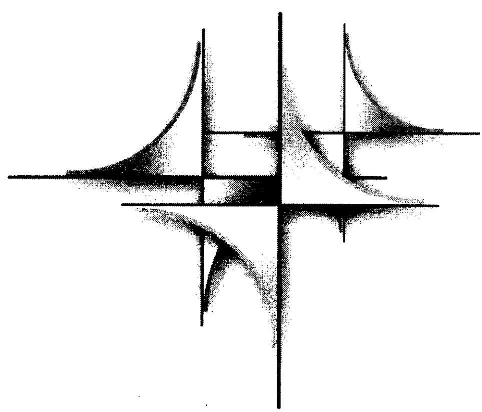
АЛГЕБРА

8

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

3-е издание, стереотипное



Издательство
МНЕМОЗИНА

Москва 2013

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Ф42

Феоктистов И. Е.
Ф42 Алгебра. 8 класс. Дидактические материалы. Методические рекомендации / И. Е. Феоктистов. — 3-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2013. — 173 с. : ил.
ISBN 978-5-346-02612-9

Дидактические материалы предназначены для проверки знаний учащихся 8-го класса с углубленным изучением математики. Тексты самостоятельных, контрольных и тестовых работ даны в соответствии с учебником Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. Н. Нешкова, И. Е. Феоктистова «Алгебра. 8 класс» (М. : Мнемозина). Задания могут быть использованы педагогами для составления различных видов проверочных работ для школьников, изучающих алгебру по учебникам других авторов.

Пособие содержит комментарии для учителя и примерное поурочное планирование.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-346-02612-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначена для организации и проведения тематического и итогового контроля уровня знаний, умений и навыков учащихся 8-го класса с углубленным и расширенным изучением математики. Представленные в пособии самостоятельные, контрольные и тестовые работы полностью соответствуют содержанию и структуре учебника Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, И. Е. Феоктистова «Алгебра. 8 класс» (М. : Мнемозина). Однако большая часть упражнений может использоваться учителем для составления различных работ в классах, изучающих алгебру по другим учебникам и учебным пособиям. В этом случае книга будет полезной и для педагогов, работающих в общеобразовательных классах с хорошей математической подготовкой. Дидактические материалы могут использоваться учащимися для самообразования и самопроверки.

Каждая самостоятельная или контрольная работа состоит из подготовительного, двух основных и третьего, дополнительного, вариантов. Подготовительный вариант может использоваться в качестве домашнего задания или для выполнения на уроке непосредственно перед самостоятельной или контрольной работой.

Дополнительный вариант можно предложить для работы над ошибками, а также в качестве третьего варианта работы во время ее выполнения. Кроме того, его можно использовать для тех учащихся, которые по каким-либо причинам пропустили проверочную работу.

Тексты контрольных и самостоятельных работ носят примерный характер, количество заданий в большинстве случаев дано с избытком. Учитель, в зависимости от специфики класса, может заменять задания или исключать их совсем.

Каждый тест содержит шесть заданий, рассчитанных на 15—20 минут.

Пособие содержит примерное поурочное планирование, в соответствии с которым выстроены предлагаемые работы. Все задания сборника снабжены ответами (за исключением заданий на доказательство и построение графиков функций).

Автор приносит искреннюю благодарность учащимся московской школы № 1741 за экспериментальную проверку самостоятельных и контрольных работ, за многочисленные замечания и советы, которые способствовали улучшению данной книги.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Повторение материала 7-го класса

Подготовительный вариант

1. Решите систему $\begin{cases} 4x + y = x + 2; \\ 2x - 2y = 3 - y. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$. Найдите $f(2) - 3 \cdot f(-1) + 2 \cdot f(0)$.

3. Постройте график уравнения $x^2 - xy - x + y = 0$, разложив его левую часть на множители.

4. Найдите значение выражения:

   а) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{3}{16}\right)^5$; б) $\dfrac{4^7 \cdot 64}{16^4}$; в) $\dfrac{42^9}{(6^2)^3 \cdot 7^9}$.

5. Разложите на множители выражение $x^4 - 2x^2 - 3$.

6. Найдите значение выражения $ab - bc - ac$, если $a^2 + b^2 + c^2 = 19$ и $a + b - c = 7$.

7. Представьте выражение $2b(3a^2 + b^2)$ в виде разности кубов.

Вариант 1

1. Решите систему $\begin{cases} 2x + 2y = x - 1; \\ 3y - x = 4 - y. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 2}$.

   Найдите $f(0) - 3 \cdot f(-3) + 2 \cdot f(-1)$.

3. Найдите значение выражений:

   а) $(1{,}75)^{12} \cdot \left(\dfrac{4}{7}\right)^{12}$; б) $\dfrac{2^7 \cdot 32}{4^5}$.

4. Постройте график уравнения $xy - y^2 + 2x - 2y = 0$, разложив его левую часть на множители.

5. Найдите все такие значения переменной x, при которых значения выражений

$(1 - 2x)(4x^2 + 2x + 1) - 16x^2$,

$(2 - 2x)(4 + 4x)(x + 2)$

равны.

6. Найдите значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$, если $a - b + c = 8$ и $ac - ab - bc = 12$.

7. Упростите выражение

$a(a - b)(a + b) - (a + b)(a^2 - ab + b^2) + b^2(a + b)$.

Вариант 2

1. Решите систему $\begin{cases} 4x + y = 2y - 4; \\ 3x + y = x + 1. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$. Найдите $3 \cdot f(4) - f(0) + 2 \cdot f(3)$.

3. Найдите значение выражений:

а) $(2{,}75)^9 \cdot \left(\dfrac{4}{11}\right)^9$; б) $\dfrac{3^5 \cdot 27}{9^3}$.

4. Постройте график уравнения $xy + y^2 - 2x - 2y = 0$, разложив его левую часть на множители.

5. Найдите все такие значения переменной x, при которых значения выражений

$(1 + 2x)(4x^2 - 2x + 1) - 16x^2$,

$(2x - 4)(2x - 2)(2 + 2x)$

равны.

6. Найдите значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$, если $a + b - c = 6$ и $ab - ac - bc = 11$.

7. Упростите выражение

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) + b(a - b)^2 - a(a - b)(a + 2b)$.

Вариант 3

1. Решите систему $\begin{cases} 3x - y = x + 8; \\ 2x + y = 5 - x - y. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$. Найдите $f(0) - 3 \cdot f(-2) + 2 \cdot f(2)$.

3. Найдите значение выражений:

а) $(0{,}375)^{15} \cdot \left(2\frac{2}{3}\right)^{14}$; б) $\frac{3^5 \cdot 243}{9^4}$.

4. Постройте график уравнения $2x^2 + 2x - xy - y = 0$, разложив его левую часть на множители.

5. Найдите все такие значения переменной x, при которых значения выражений $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 2x^2$ и $(x - 1)(1 + x)(x - 2)$ равны.

6. Найдите значение выражения $ab - ac - bc$, если $a + b - c = 5$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 17$.

7. Упростите выражение
$a(a - b)(a + b) + (a - b)(a^2 + ab + b^2) - b^2(a - b)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Дроби и их свойства

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где буквами обозначены числовые выражения или выражения, содержащие переменные. Выражение a называют *числителем* дроби $\frac{a}{b}$, а выражение b — ее *знаменателем*. Например: $\frac{1}{2}$, $\frac{x-1}{x+1}$.

Рациональным выражением называется выражение, составленное из чисел и переменных и содержащее сложение, умножение, вычитание, деление и возведение в степень, например: 12, $2x^2 - x$, $\frac{x + x^3}{6}$, $\frac{2x - 1}{x} - 1$, $(2x + 1)^2 : (x^2 - 1)$. Выражения с модулем *не являются* рациональными выражениями.

Если рациональное выражение *не содержит операцию деления на переменную*, то оно называется *целым* (например, $2x^2 - x$, $\frac{x + x^3}{6}$), если содержит деление на переменную — *дробным* (например, $\frac{2x - 1}{x} - 1$, $(2x + 1)^2 : (x^2 - 1)$; эти дробные выражения не являются дробями!).

ОДЗ (область допустимых значений) переменной в выражении — множество *всех* значений переменной, при которых выражение имеет смысл. Например, ОДЗ переменной в выражении $\frac{2}{x} - \frac{3x}{|x| - 1}$ — все числа, кроме 0, 1 и −1.

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (где $bc \neq 0$) — приведение к новому знаменателю; $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ (где $bc \neq 0$) — сокращение дробей.

Многочлен степени n, составленный из одночленов, степень каждого из которых равна n, называется *однородным*, например $2x^2 - 3xy + y^2$.

Подготовительный вариант

1. При каких значениях переменной дробь не имеет смысла:

а) $\frac{a}{|x| - 3}$; б) $\frac{a}{4x^2 - 25}$?

2. Найдите ОДЗ переменной в выражении:

а) $\frac{a}{4x^2 + 25}$; б) $\frac{a}{4x^2 + 20x + 25}$.

3. При каких значениях переменной равна нулю дробь:

а) $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$; б) $\frac{4}{4x^2 - 9}$?

4. Приведите дробь $\frac{a}{x - 2}$ к знаменателю:

а) $2 - x$;
б) $0{,}5x - 1$;
в) $4 - x^2$;
г) $4 - 4x + x^2$;
д) $x^3 - 8$.

5. Замените дробь $\dfrac{\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + 1}{0{,}5x^3 + \frac{5}{6}x}$ тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой являются многочленами с целыми коэффициентами.

6. Сократите дроби:

а) $\frac{2x^3y}{6x^2y^2}$;
б) $\frac{3x^2 - 6x}{4 - 2x}$;
в) $\frac{16 - x^2}{16 + 8x + x^2}$;
г) $\frac{a^3 - 27b^3}{2a^2 + 6ab + 18b^2}$;
д) $\frac{2^{2n+1}}{4^{n+1}}$.

7. Запишите множество всех целых значений переменной m, при которых значение дроби:

а) $\dfrac{11}{m+1}$ является натуральным;

б) $\dfrac{14}{2m+3}$ является целым.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-7xy+2y^2}$, если $\dfrac{x-5y}{y}=3$.

9. Постройте график функции $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x-2}$. Найдите ее область определения и область значений.

Вариант 1

1. При каких значениях переменной дробь не имеет смысла:

а) $\dfrac{a}{2-|x|}$; б) $\dfrac{a}{9-x^2}$?

2. При каких значениях переменной равна нулю дробь:

а) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$; б) $\dfrac{|x|+4}{4-x^2}$?

3. Приведите дробь $\dfrac{a}{1-x}$ к знаменателю:

а) $x-1$; б) $1-x^2$; в) $1-2x+x^2$; г) x^3-1.

4. Замените дробь $\dfrac{0{,}25x-0{,}2}{0{,}25x^2+0{,}5x+0{,}3}$ тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой являются многочленами с целыми коэффициентами.

5. Сократите дроби:

а) $\dfrac{12xy^2}{8x^2y}$; г) $\dfrac{m^3-8n^3}{2n-m}$;

б) $\dfrac{2x-6x^2}{6x-2}$; д) $\dfrac{2^n\cdot x+2^{n+1}}{2^{n+1}\cdot x^2-2^{n+3}}$.

в) $\dfrac{4x^2-1}{1+4x+4x^2}$;

6. Запишите множество всех целых значений переменной m, при которых значение дроби:

а) $\dfrac{13}{m-1}$ является натуральным;

б) $\dfrac{10}{2m-1}$ является целым.

7. Найдите значение выражения $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2x^2 + xy - 3y^2}$, если $\frac{x + 2y}{y} = 4$.

8. Постройте график функции $f(x) = \frac{4 - 4x + x^2}{2 - x}$. Найдите ее область определения и область значений.

Вариант 2

1. При каких значениях переменной дробь не имеет смысла:

а) $\frac{a}{4 - |x|}$; б) $\frac{a}{1 - x^2}$?

2. При каких значениях переменной равна нулю дробь:

а) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$; б) $\frac{2 + |x|}{x^2 - 1}$?

3. Приведите дробь $\frac{a}{3 - x}$ к знаменателю:

а) $x - 3$; б) $9 - x^2$; в) $9 - 6x + x^2$; г) $x^3 - 27$.

4. Замените дробь $\frac{0,2x^2 + 0,25}{0,25x^2 - x + 0,6}$ тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой являются многочленами с целыми коэффициентами.

5. Сократите дроби:

а) $\frac{18x^2y}{24xy^2}$; г) $\frac{m^3 + 8n^3}{2n + m}$;

б) $\frac{6x - 2x^2}{2x - 6}$; д) $\frac{2^{n+1} \cdot x - 2^{n+2}}{2^n \cdot x^2 - 2^{n+2}}$.

в) $\frac{4x^2 - 1}{1 - 4x + 4x^2}$;

6. Запишите множество всех целых значений переменной m, при которых значение дроби:

а) $\frac{17}{m + 2}$ является натуральным;

б) $\frac{22}{2m + 1}$ является целым.

7. Найдите значение выражения $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2}$, если $\frac{x + 2y}{x} = 3$.

8. Постройте график функции $f(x) = \frac{4x - x^2 - 4}{x - 2}$. Найдите ее область определения и область значений.

Вариант 3

1. При каких значениях переменной дробь не имеет смысла:

а) $\dfrac{a}{7-|x-3|}$; б) $\dfrac{a}{25-4x^2}$?

2. При каких значениях переменной равна нулю дробь:

а) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$; б) $\dfrac{|3-x|+4}{4-4x+x^2}$?

3. Приведите дробь $\dfrac{a}{1+x}$ к знаменателю:

а) $2x+2$; б) $1-x^2$; в) $2+4x+2x^2$; г) x^3-x.

4. Замените дробь $\dfrac{0{,}2x-0{,}25}{0{,}5x^2+0{,}25x-0{,}7}$ тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой являются многочленами с целыми коэффициентами.

5. Сократите дроби:

а) $\dfrac{28x^4y^2}{21x^2y^3}$; г) $\dfrac{m^3-8n^3}{2n-m}$;

б) $\dfrac{2x-6x^2}{6x-2}$; д) $\dfrac{2^n \cdot x+2^{n+1}}{2^{n+1} \cdot x^2-2^{n+3}}$.

в) $\dfrac{4x^2-1}{1+4x+4x^2}$;

6. Запишите множество всех целых значений переменной m, при которых значение дроби:

а) $\dfrac{13}{m-1}$ является натуральным;

б) $\dfrac{10}{2m-1}$ является целым.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{2x^2+xy-2y^2}$, если $\dfrac{x+2y}{y}=3$.

8. Постройте график функции $f(x)=\dfrac{4-4x+x^2}{2-x}$. Найдите ее область определения и область значений.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Сложение и вычитание дробей

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Вычитание всегда можно заменить сложением с выражением, противоположным вычитаемому, т. е. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + \left(-\frac{b}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{-b}{c}$.

Поэтому сложение и вычитание дробей выполняются по одним и тем же правилам.

Правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Правило сложения дробей с различными знаменателями: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Алгоритм сложения (вычитания) дробей с различными знаменателями:

- разложить знаменатели дробей на множители (и, если возможно, сократить дроби);
- выбрать *наименьший общий* знаменатель дробей-слагаемых;
- записать у каждой дроби-слагаемого дополнительный множитель, которого «недостает» знаменателю этой дроби до наименьшего общего знаменателя;
- записать в числитель дроби-суммы сумму произведений числителей дробей и их дополнительных множителей;
- упростить числитель дроби-суммы и, если возможно, сократить полученную дробь.

Числитель дроби всегда подразумевается записанным в скобках, т. е. $\frac{b}{x} - \frac{a+b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{(a+b)}{x} = \frac{b-(a+b)}{x} = \frac{b-a-b}{x} = -\frac{a}{x}$.

Любое целое рациональное выражение всегда можно представить в виде дроби, например: $2x^2 = \frac{2x^2}{1} = \frac{6x^3}{3x} = \dots$. Обратное возможно не всегда.

Для представления дроби в виде суммы двух дробей используют *метод неопределенных коэффициентов*. При этом используется *покоэффициентное* равенство многочленов: многочлены равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны.

Подготовительный вариант

1. Выполните действия:

а) $\dfrac{2c}{c-1}+\dfrac{1-c}{c-1}$; б) $\dfrac{2c+1}{c-1}+\dfrac{c-2}{1-c}$; в) $\dfrac{2c-1}{(c-1)^2}-\dfrac{3-2c}{(1-c)^2}$.

2. Докажите, что значение выражения $\dfrac{(a-1)^2}{a^2+2}-\dfrac{1-2a}{a^2+2}+\dfrac{2}{a^2+2}$ не зависит от переменной a.

3. Выполните действия:

а) $\dfrac{2x}{2x-6}-\dfrac{9}{x^2-3x}$; б) $\dfrac{a+2}{2a-a^2}+\dfrac{a}{a^2-4}$; в) $\dfrac{4x^2}{x-3}-2x$.

4. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени:

а) $\dfrac{3x+3}{(x-1)(x+5)}$; б) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$.

5. Выполните деление «уголком»:

а) $(2x^3-x^2-3x-1):(2x+1)$; б) $(3x^3-4x^2+1):(x-1)$.

6. Выделите целую часть дроби и выясните, при каких натуральных значениях переменной n дробь принимает натуральные значения:

а) $\dfrac{4n^2+3n-5}{n}$; б) $\dfrac{4n^2+3n-5}{n-1}$.

7. Представьте дробь $\dfrac{12}{35}$ в виде суммы различных правильных дробей с однозначными знаменателями.

8. Докажите, что графики функций $\alpha(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}$ и $\beta(x)=$ $=x+1$ не имеют общих точек.

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2-x}{x+1}$; б) $\dfrac{2a+1}{2a-1}+\dfrac{a-2}{1-2a}$; в) $\dfrac{2y-1}{(y-2)^2}-\dfrac{y+1}{(2-y)^2}$.

2. Докажите, что значение выражения $\dfrac{(2-x)^2}{x^2+3}-\dfrac{2-3x}{x^2+3}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$ не зависит от переменной x.

3. Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{3x^2-3x}$; б) $\dfrac{x+1}{x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-1}$; в) $\dfrac{2x^2}{x-1}-2x$.

4. Представьте в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

5. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени:

а) $\frac{3x+3}{(x-1)(x+2)}$; б) $\frac{5x+4}{x^2+x-2}$.

6. Выделите целую часть дроби и выясните, при каких натуральных значениях переменной n дробь принимает натуральные значения:

а) $\frac{3n^2-3n-2}{n}$; б) $\frac{3n^2+3n-2}{n+2}$.

7. Представьте дробь $\frac{11}{15}$ в виде суммы различных правильных дробей с однозначными знаменателями.

8. Докажите, что графики функций $f(x) = \frac{6-x-x^2}{x-2}$ и $h(x) = 1 - 3x$ не имеют общих точек.

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $\frac{2a}{a+2} + \frac{2-a}{a+2}$; б) $\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{x-1}{1-2x}$; в) $\frac{2-y}{(3-y)^2} - \frac{5-2y}{(y-3)^2}$.

2. Докажите, что значение выражения $\frac{(x+2)^2}{x^2+5} - \frac{1+3x}{x^2+5} + \frac{2-x}{x^2+5}$ не зависит от переменной x.

3. Выполните действия:

а) $\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{3x^2+3x}$; б) $\frac{x-2}{x+x^2} + \frac{x}{x^2-1}$; в) $\frac{2x^2}{x+1} - 2x$.

4. Представьте в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(x-1)x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

5. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени:

а) $\frac{3x-3}{(x+1)(x-2)}$; б) $\frac{5x-4}{x^2-x-2}$.

6. Выделите целую часть дроби и выясните, при каких натуральных значениях переменной n дробь принимает натуральные значения:

а) $\dfrac{3n^2 - 2n - 3}{n}$; б) $\dfrac{3n^2 + 4n - 2}{n + 1}$.

7. Представьте дробь $\dfrac{13}{15}$ в виде суммы различных правильных дробей с однозначными знаменателями.

8. Докажите, что графики функций $f(x) = \dfrac{6 + x - x^2}{x + 2}$ и $h(x) = 1 - 2x$ не имеют общих точек.

Вариант 3

1. Выполните действия:

а) $\dfrac{4x}{2x - 1} + \dfrac{1 - 6x}{2x - 1}$; б) $\dfrac{2x - 1}{1 - x} + \dfrac{x - 2}{x - 1}$; в) $\dfrac{x - 2}{(2x - 3)^2} - \dfrac{1 - x}{(3 - 2x)^2}$.

2. Докажите, что значение выражения $\dfrac{(x - 1)^3}{x^3 + 2} - \dfrac{3x(1 - x)}{x^3 + 2} + \dfrac{3}{x^3 + 2}$ не зависит от переменной x.

3. Выполните действия:

а) $\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{x^2 - x}$; б) $\dfrac{x + 1}{x - x^2} + \dfrac{x + 3}{x^2 - 1}$; в) $\dfrac{4x^2}{x - 2} - 3x$.

4. Представьте в виде дроби выражение

$$\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \ldots + \frac{1}{(x + 99)(x + 100)}.$$

5. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени:

а) $\dfrac{8x - 3}{(2x + 1)(x - 3)}$; б) $\dfrac{5x + 1}{2x^2 + 5x - 3}$.

6. Выделите целую часть дроби и выясните, при каких натуральных значениях переменной n дробь принимает натуральные значения:

а) $\dfrac{4n^2 - 2n + 3}{n}$; б) $\dfrac{n^2 + 3n - 2}{n + 2}$.

7. Представьте дробь $\dfrac{7}{18}$ в виде суммы различных правильных дробей с однозначными знаменателями.

8. Докажите, что графики функций $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ и $h(x) = 2x - 2$ не имеют общих точек.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Умножение, возведение в степень и деление дробей

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Правило умножения дробей: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Правило возведения дроби в степень: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $n \in N$.

Правило деления дробей: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Любое выражение можно представить в виде дроби со знаменателем 1.

Дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены, называется *рациональной дробью*. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена-числителя меньше степени многочлена-знаменателя. Например, дробь $\frac{2x-1}{x^2+x+2}$ — правильная, а дробь $\frac{2x^2-x-1}{2x-1}$ не является правильной. Из неправильной дроби можно *выделить целую часть* подобно тому, как это делают с числовыми дробями. Например, $\frac{2x^2-x-1}{2x-1} = \frac{2x^2-x}{2x-1} - \frac{1}{2x-1} = x - \frac{1}{2x-1}$. То же самое можно сделать, выполнив деление числителя на знаменатель «уголком»: неполное частное будет целой частью, остаток — числителем, а делитель — знаменателем правильной рациональной дроби.

Подготовительный вариант

1. Выполните действия:

а) $\frac{12a}{5x^2} \cdot \frac{15x}{8a^3}$;

б) $\frac{x^2-4y^2}{5x^2} \cdot \frac{25x}{x^2-4xy+4y^2}$;

в) $\frac{3xy^4}{5a^2} : (6xy^3)$;

г) $2x^2y \cdot \frac{3a}{14xy^3}$.

2. Упростите выражение $\frac{a^3b^3}{a^3-a^2b} \cdot \frac{a^2-b^2}{6ab^3} : \frac{3a+3b}{ab}$ и найдите его значение при $a = -\frac{2}{7}$, $b = 3{,}5$.

3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $\frac{2x^2 + 2x - xy - y}{2x^2 + 4x - xy - 2y} \cdot \frac{2x - 2}{6 - 3x} : \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 8}$ не зависит от значения переменных.

4. Упростите выражение $\frac{2^{2n+1}}{3x^2 - 12} : \frac{2^{2n-1}}{2x - 4}$, где $n \in N$.

5. Упростите выражение $\left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}\right)^4 \cdot \frac{(x + 2)^8}{(x - 2)^4}$ и найдите все целые значения переменой, при которых значение выражения является натуральным числом.

6. Выполните деление $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 27} : \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 3x + 9}$ и в полученной рациональной дроби выделите целую часть.

7. Постройте график функции

$f(x) = \frac{x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{2x^4 + 2x}{x^9 + 1}$. Каковы ее область определения и область значений?

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $\frac{6a}{25b^2} \cdot \frac{5b}{8a^2}$;

б) $\frac{4x^2 - 9y^2}{18y^2} \cdot \frac{24y}{4x^2 + 12xy + 9y^2}$;

в) $\frac{2xy^3}{3a} : (8xy^4)$;

г) $9x^2y \cdot \frac{4a^2}{27x^3y^2}$.

2. Упростите выражение $\frac{a^4b^4}{a^2b - b^3} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2a^2b^2} : \frac{2a^2 - 2ab}{3a + 3b}$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{3}$, $b = 4$.

3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $\frac{x^2 - x - 2xy + 2y}{2x^2 + x - 4xy - 2y} \cdot \frac{4x + 2}{3x} : \frac{1 - x^2}{x^2 + x}$ не зависит от значения переменных.

4. Упростите выражение $\frac{2^{n-1}}{3x - 6} : \frac{2^n}{x^2 - 4}$, где $n \in N$.

5. Упростите выражение $\left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x}\right)^3 \cdot \frac{(x-2)^6}{(x+2)^3}$ и найдите все целые значения переменой, при которых значение выражения является натуральным числом.

6. Выполните деление $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 8} : \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 4}$ и в полученной рациональной дроби выделите целую часть.

7. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{x^8 - x^7 + x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{2x^4 - 2x}{x^9 - 1}.$$

Каковы ее область определения и область значений?

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $\frac{14a^2}{6x^3} \cdot \frac{9x^2}{21a}$;

б) $\frac{4x^2 - y^2}{2x^4} \cdot \frac{12x^3}{4x^2 + 4xy + y^2}$;

в) $\frac{8x^2y}{3a^3} : (6xy^3)$;

г) $3x^3y^2 \cdot \frac{2a^2}{15x^2y^3}$.

2. Упростите выражение $\frac{a^3b^3}{a^3 - a^2b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{4ab^2} : \frac{ab + b^2}{12ab}$ и найдите его значение при $a = -\frac{2}{3}$, $b = 0{,}5$.

3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $\frac{2xy + 2x - y^2 - y}{2xy - 4x - y^2 + 2y} \cdot \frac{3y - 6}{2y} : \frac{1 - y^2}{y^2 - y}$ не зависит от значения переменных.

4. Упростите выражение $\frac{9 - x^2}{3^{n+1}} : \frac{2x - 6}{3^n}$, где $n \in N$.

5. Упростите выражение $\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x}\right)^5 \cdot \frac{(x+2)^{10}}{(x-2)^5}$ и найдите все целые значения переменой, при которых значение выражения является натуральным числом.

6. Выполните деление $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 + 8} : \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 4}$ и в полученной рациональной дроби выделите целую часть.

7. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{x^8 + x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{2x^4 + 2x}{x^9 + 1}.$$

Каковы ее область определения и область значений?

Вариант 3

1. Выполните действия:

а) $\frac{12a^3}{625b^2} \cdot \frac{250b}{8a^2}$;

б) $\frac{2x^2 - 0{,}5y^2}{9y^2} \cdot \frac{12y^4}{2x^2 - 2xy + 0{,}5y^2}$;

в) $\frac{12x^2y^3}{15a} : (6x^3y^4)$;

г) $51x^2y \cdot \frac{3a}{34x^2y^2}$.

2. Упростите выражение $\frac{a^3 - 8b^3}{a^2 - 4b^2} \cdot \frac{2a^2b + 2ab^2}{a^2 + 2ab + 4b^2} : \frac{a^2 + ab}{a + 2b}$ и найдите его значение, если $a = -2\frac{3}{31}$, $b = -0{,}35$.

3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $\frac{4x^2 + 6x - 6xy - 9y}{4x^2 - 2x - 6xy + 3y} \cdot \frac{2x}{2x + 3} : \frac{6x^2 + 3x}{4x^2 - 1}$ не зависит от значения переменных.

4. Упростите выражение $\frac{x \cdot 2^{2n-3} - 2^{2n-2}}{4 - x^2} : \frac{3x \cdot 2^{2n-1} - 2^{2n-1}}{2x + 4}$, где $n \in N$.

5. Упростите выражение $\left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x}\right)^3 \cdot \frac{(x + 3)^6}{(x + 2)^3}$ и найдите все целые значения переменой, при которых значение выражения является натуральным числом.

6. Выполните деление $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 8} : \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4}$ и в полученной рациональной дроби выделите целую часть.

7. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{x^8 - x^7 + x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{2x - 2x^4}{x^9 - 1}.$$

Каковы ее область определения и область значений?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Преобразование рациональных выражений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Преобразование рациональных выражений проводят либо последовательно, либо по действиям. Для рационализации преобразований используют некоторые специальные приемы.

Порядок действий при преобразовании рациональных выражений тот же, что и при вычислении значений числовых выражений: сначала выполняют действия в скобках, затем — возведение в степень, умножение и деление, последними производят сложение и вычитание.

Иногда, если это возможно и необходимо, при преобразовании выражений применяют замену переменной, упрощающую промежуточные выкладки.

Подготовительный вариант

1. Выполните действия:

а) $\dfrac{6x+y}{2x}+\dfrac{4x^2}{y}\cdot\dfrac{y^2}{8x^3}$;

б) $a+b-\dfrac{2a+b}{a}:\dfrac{2a-b}{a^2}$;

в) $\left(\dfrac{4x-2}{4x-3}+1\right)\cdot\dfrac{12x-9}{(2x-1)(8x-5)}$.

2. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{2}{t^3-1}:\dfrac{1+t}{1+t+t^2}\right):\dfrac{t}{1+t}$.

3. Представьте в виде рациональной дроби выражение

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ab+b^2}+\dfrac{1}{a^2+ab}}-\frac{1}{\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}}.$$

4. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2}{(2z+1)^2}-\frac{1}{1-4z^2}\right):\frac{1}{(1+2z)^2}-\frac{6z}{2z-1},\ \text{если } z=\frac{3}{4}.$$

5. При каких натуральных значениях n значение выражения $\left(\dfrac{3}{n!}+\dfrac{5}{(n+1)!}\right):\left(\dfrac{7}{n!}-\dfrac{6n}{(n+1)!}\right)$ является целым числом? (Выражение $n!$ — «эн факториал» — определяется как произведение всех целых чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.)

6. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $(b^2 + b + ab + a)(2a - b - b^2 + 2ab) \times$

$\times \dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b} - \dfrac{a^2+b^2+a+5}{2a^2+ab-b^2}}{2b^2+a+5}$ не положительно и не зависит от значения переменной a.

7. Найдите ошибку в рассуждениях.

Рассмотрим сумму бесконечного ряда чисел $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots$. Сумма этого ряда равна 1, поскольку он равен $\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) + \ldots$, где в любых двух соседних скобках второе слагаемое первой скобки противоположно первому слагаемому второй скобки. Таким образом,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots = 1.$$

Перенесем первое слагаемое из левой части равенства в правую, получим $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots = \dfrac{1}{2}$.

Теперь из левой части равенства снова перенесем первое слагаемое, получим

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Будем продолжать этот процесс до бесконечности. Сложив почленно три записанные выше и все остальные (до бесконечности) равенства и замечая, что $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3}$, $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4}$, ..., получим равенство

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots}_{\infty} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots}_{\infty},$$

из которого следует, что $1 = 0$.

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^2+1-2x}{2x}\right)^2 - x^2;$

в) $\dfrac{7}{3x-1} - \dfrac{5}{2x-1} : \dfrac{3x-1}{4x^2-1}.$

б) $\left(\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1}\right) : \dfrac{4x^2+2x+6}{x^2-1};$

2. Выражение $\dfrac{a - \dfrac{4a-4}{a}}{\dfrac{2}{a} - 1}$ представьте в виде рациональной дроби и найдите ее область допустимых значений.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{2-4b} + \frac{b+1}{8b^3-1} \cdot \frac{4b^2+2b+1}{1+2b}\right) : \frac{1}{4b-2}.$$

4. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2-1}\right) \cdot (x-1)^2 - \frac{3x}{x+1}, \text{ если } x = -1{,}5.$$

5. При каких натуральных значениях n значение выражения $\left(\dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{3}{n!}\right) : \left(\dfrac{5}{n!} - \dfrac{4n}{(n+1)!}\right)$ является целым числом? (Выражение $n!$ — «эн факториал» — определяется как произведение всех целых чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^2+4+4x}{3x}\right)^2 - x^2;$

в) $\dfrac{6}{2x+3} - \dfrac{5}{2x+1} : \dfrac{2x+3}{4x^2-1}.$

б) $\left(\dfrac{2x}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}\right) : \dfrac{6x^2+15x-6}{x^2-4};$

2. Выражение $\dfrac{1 - \dfrac{3}{c}}{\dfrac{6c-9}{c} - c}$ представьте в виде рациональной дроби и найдите ее область допустимых значений.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{2-6a} + \frac{1}{27a^3-1} : \frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right) \cdot \frac{2+6a}{a}.$$

4. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3}{(3-y)^2}+\frac{9}{y^2-9}\right):\frac{6}{(y-3)^2}+\frac{1-2y}{3+y},\text{ если } y=-3{,}2.$$

5. При каких натуральных значениях n значение выражения $\left(\frac{3}{(n+1)!}-\frac{2}{n!}\right):\left(\frac{4}{n!}-\frac{3n}{(n+1)!}\right)$ является целым числом? (Выражение $n!$ — «эн факториал» — определяется как произведение всех целых чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.)

Вариант 3

1. Выполните действия:

а) $\left(\frac{5x-3}{2-3x}\right)^2\cdot\left(\frac{9x^2-12x+4}{3-5x}\right)^2-8x(x-1)$;

б) $\left(\frac{5}{2x-1}-\frac{2x}{x+1}\right):\frac{2x^2-3{,}5x-2{,}5}{2x^2+x-1}$;

в) $\frac{2}{1-2x}-\frac{3}{1-3x}:\frac{2x-1}{9x^2-1}$.

2. Выражение $\dfrac{4a-\frac{4a-1}{a}}{2-\frac{1}{a}}$ представьте в виде рациональной дроби и найдите ее область допустимых значений.

3. Упростите выражение

$$\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}.$$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a),\text{ если } a=b=-0{,}5.$$

5. При каких натуральных значениях n значение выражения $\left(\frac{4n}{(n+1)!}-\frac{2}{n!}\right):\left(\frac{3}{n!}-\frac{2n}{(n+1)!}\right)$ является целым числом? (Выражение $n!$ — «эн факториал» — определяется как произведение всех целых чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Множество натуральных и множество целых чисел

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение пересечения двух множеств. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

Определение объединения двух множеств. $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

СВОЙСТВА ДЕЙСТВИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

$$A \cap A = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup A = A,\ A \cup \varnothing = A.$$

Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$.

Если $n(A)$ и $n(B)$ — число элементов конечных множеств A и B, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. В частности, если $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cap B) = 0$ и $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Для трех множеств можно доказать справедливость формулы $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Для сравнения числа элементов бесконечных множеств M и N используют *взаимно однозначное соответствие. Каждому* элементу множества M ставится в соответствие *единственный* элемент множества N, и при этом *каждый* элемент множества N является соответствующим *единственному* элементу множества M. Если элементу $m \in M$ поставлен в соответствие элемент $n \in N$, то говорят, что n является *образом* элемента m, а n — *прообразом* элемента m. Множества, между элементами которых установлено взаимно однозначное соответствие, называют *равномощными*: для них $n(N) = n(M)$. Так, равномощными являются множества $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$, множество четных и множество нечетных чисел. Множество, равномощное множеству $\boldsymbol{N}$, называют *счетным*.

Если для любых $x \in A$ и $y \in A$ определена операция «$\circ$» и $(x \circ y) \in A$, то говорят, что множество A *замкнуто* относительно операции «$\circ$». Множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения (сумма и произведение двух натуральных чисел есть число натуральное), множество целых чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения.

Множество натуральных чисел имеет наименьший элемент — число 1, но не имеет наибольшего элемента. Говорят, что множество $\boldsymbol{N}$ *ограничено снизу* и не ограничено сверху. Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ *не ограничено* ни сверху, ни снизу. Поскольку между любыми двумя целыми числами не всегда можно вставить целое число, то говорят, что множество целых чисел (и множество натуральных чисел) *не плотно*. Поскольку всегда можно сравнить два любых целых числа, то говорят, что это множество *упорядочено* (как и множество натуральных чисел).

Подготовительный вариант

1. Задайте с помощью характеристического свойства объединение и пересечение множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

2. Даны два множества точек: $A = \{(x;\ y) \mid y$ — любое число, $-2 \leqslant y \leqslant 3\}$ и $B = \{(x;\ y) \mid y$ — любое число, $|x| \leqslant 2\}$. Изобразите эти множества в координатной плоскости и выделите штриховкой их пересечение.

3. Из 17 учащихся класса, посещающих секции футбола и баскетбола, 15 — футболисты и 10 — баскетболисты. Сколько учащихся посещают две секции сразу?

4. Докажите, что если $\dfrac{x}{y} \in \boldsymbol{Z}$, то $\dfrac{2x^2 + 3xy - 2y^2}{2xy - y^2} \in \boldsymbol{Z}$.

5. В координатной плоскости постройте пересечение двух множеств: множества всех точек M, для которых выполняется неравенство $AM \leqslant 4$, где $A(-1;\ 2)$, и множества точек, удовлетворяющих уравнению $2x - y = 1$.

6. Укажите какой-нибудь способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множествами $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

7. При каких целых значениях параметра a корень уравнения $2ab - 1 = 3b + 4$ является:
   а) целым числом; б) натуральным числом?

8. Пусть M — множество чисел, кратных числу 7, K — множество степеней числа 3. Являются ли эти множества замкнутыми относительно операции:
   а) сложения; б) умножения?
   Ответ обоснуйте.

Вариант 1

1. Задайте с помощью характеристического свойства объединение и пересечение множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 5n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

2. Даны два множества точек: $A = \{(x;\ y) \mid y$ — любое число, $-1 \leqslant y \leqslant 4\}$ и $B = \{(x;\ y) \mid y$ — любое число, $|x| \leqslant 1\}$. Изобразите эти множества в координатной плоскости и выделите штриховкой их пересечение.

3. Из 25 учащихся класса 18 изучают английский язык и 16 — французский. Сколько учащихся изучают и английский, и французский язык?

4. Докажите, что если $\frac{y}{x} \in \boldsymbol{Z}$, то $\frac{3x^2 + 4xy - 4y^2}{3x^2 - 2xy} \in \boldsymbol{Z}$.

5. В координатной плоскости постройте пересечение двух множеств: множества всех точек M, для которых выполняется неравенство $AM \leqslant 3$, где $A(1; -2)$, и множества точек, удовлетворяющих уравнению $2x + y = 2$.

6. Укажите какой-нибудь способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множествами $A = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 5n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

7. При каких целых значениях параметра a корень уравнения $2ab - 1 = 6 - 3b$ является:
а) целым числом; б) натуральным числом?

8. Пусть M — множество чисел, кратных числу 3, K — множество натуральных степеней числа 2. Являются ли эти множества замкнутыми относительно операции:
а) сложения; б) умножения?
Ответ обоснуйте.

Вариант 2

1. Задайте с помощью характеристического свойства объединение и пересечение множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 7n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

2. Даны два множества точек: $A = \{(x; y) \mid y$ — любое число, $-3 \leqslant y \leqslant 2\}$ и $B = \{(x; y) \mid y$ — любое число, $|x| \leqslant 3\}$. Изобразите эти множества в координатной плоскости и выделите штриховкой их пересечение.

3. Из 24 учащихся класса 17 изучают английский язык и 12 — французский. Сколько учащихся изучают и английский, и французский язык?

4. Докажите, что если $\frac{x}{y} \in \boldsymbol{Z}$, то $\frac{2x^2 - 7xy + 6y^2}{2xy - 3y^2} \in \boldsymbol{Z}$.

5. В координатной плоскости постройте пересечение двух множеств: множества всех точек M, для которых выполняется неравенство $AM \leqslant 3$, где $A(1; 2)$, и множества точек, удовлетворяющих уравнению $2x + y = 3$.

6. Укажите какой-нибудь способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множествами $A = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 7n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

7. При каких целых значениях параметра a корень уравнения $2ab + 1 = 6 + 3b$ является:
а) целым числом; б) натуральным числом?

8. Пусть M — множество чисел, кратных числу 5, K — множество натуральных степеней числа 3. Являются ли эти множества замкнутыми относительно операции:
а) сложения; б) умножения?
Ответ обоснуйте.

Вариант 3

1. Задайте с помощью характеристического свойства объединение и пересечение множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 12n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

2. Даны два множества точек: $A = \{(x;\ y) \mid y$ — любое число, $-2 \leqslant y \leqslant 0\}$ и $B = \{(x;\ y) \mid y$ — любое число, $|x| \leqslant 1\}$. Изобразите эти множества в координатной плоскости и выделите штриховкой их пересечение.

3. Из 35 хозяйств деревни в 27 хозяйствах занимаются животноводством и в 33 — растениеводством. Сколько хозяйств в деревне занимаются и тем, и другим видом сельскохозяйственной деятельности?

4. Докажите, что если $\dfrac{x}{y} \in \boldsymbol{Z}$, то $\dfrac{2x^2 - 5xy + 2y^2}{2xy - y^2} \in \boldsymbol{Z}$.

5. В координатной плоскости постройте пересечение двух множеств: множества всех точек M, для которых выполняется неравенство $AM \leqslant 2$, где $A(1;\ 2)$, и множества точек, удовлетворяющих уравнению $x - y = 1$.

6. Укажите какой-нибудь способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множествами $A = \{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 12n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

7. При каких целых значениях параметра a корень уравнения $3ab - ab = a - b + 1$ является:
а) целым числом; б) натуральным числом?

8. Пусть M — множество чисел, кратных числу 2, K — множество степеней числа 5. Является ли замкнутым множество:
а) M относительно умножения;
б) K относительно сложения?
Ответ обоснуйте.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Свойства делимости, делимость суммы и произведения

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Целое число a делится на целое отличное от нуля число b, если существует целое число k такое, что $a = bk$.

В этом случае число a называется *кратным* числа b, а число b — *делителем* числа a. Обозначение $a \vdots b$ читается: «a кратно b», «a делится на b» или «b — делитель a». Если число a не кратно числу b, то это иногда записывают так: $a \not\vdots\, b$ или a не $\vdots\, b$.

СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ

1. Если $a \neq 0$, то $a \vdots a$.
2. Если $b \neq 0$, то $0 \vdots b$.
3. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$. (По определению $b \neq 0$ и $c \neq 0$.)
4. Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$. (Или, иначе, $|a| = b$.)
5. Если $a \vdots n$ и $b \vdots n$, то $(a \pm b) \vdots n$.
6. Если $a \vdots n$ и $b \not\vdots\, n$, то $(a \pm b) \not\vdots\, n$. (Если ровно одно слагаемое не делится на n, то и вся сумма (или разность) не делится на n.)
7. Если $a \vdots n$, то $(ab) \vdots n$.
8. Если $a \vdots n$ и $b \vdots m$, то $(ab) \vdots (mn)$.
9. Произведение n последовательных целых чисел делится на число n. В частности, $(a^2 + a) \vdots 2$; $(a^3 - a) \vdots 3$, кроме того, $(a^3 - a) \vdots 2$, следовательно, $(a^3 - a) \vdots 6$. Вообще число $a(a + 1) \times \times (a + 2) \cdot ... \cdot (a + n)$ имеет делителями числа $1, 2, 3, 4, ..., n$ и $n + 1$, а также всевозможные их произведения, заканчивая числом $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n + 1)$, т. е. числом $(n + 1)!$.

Подготовительный вариант

1. Из выражений $7n^3 - 28n^2$, $7n + 21$, $14n + 2$, $2n + 7$, $7n - 6$ выпишите те, которые:
   а) делятся на 7 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
   б) не делятся на 7 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
   в) делятся на 7 при некоторых значениях $n \in \boldsymbol{Z}$ (при каких?).

2. Докажите, что:
   а) $8^7 - 4^9$ делится на 7;
   б) $9^7 + 27^4$ делится на 30;
   в) $2^{25} + 4^{13} - 8^7$ делится на 188.

3. Докажите, что:
а) $8^7 - 1$ кратно 7; б) $8^7 + 1$ кратно 3.

4. Найдите все целочисленные решения уравнения:
а) $xy = 7$; б) $xy - x = 2y + 5$.

5. Докажите, что дробь $\frac{7^{4n} - 1}{10}$ сократима.

6. Докажите, что при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
а) $3n^2 + n - 4$ кратно 2; б) $2n^3 + 7n + 3$ кратно 3.

7. Докажите, что на графике уравнения $15x - 5y = 104$ не найдется ни одной точки с целочисленными координатами.

8. Докажите, что если 3 является делителем выражения $a + b$, то 9 — делитель выражения $a^3 + b^3$.

9. Докажите, что значение выражения $7^{333} + 3^{777}$ — число, оканчивающееся на нуль.

Вариант 1

1. Из выражений $3n - 12n^2$, $3n + 1$, $15n + 12$, $2n + 21$, $9n^2 - 2n$ выпишите те, которые:
а) делятся на 3 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
б) не делятся на 3 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
в) делятся на 3 при некоторых значениях $n \in \boldsymbol{Z}$ (при каких?).

2. Докажите, что:
а) $8^7 + 4^9$ делится на 9;
б) $9^7 - 27^4$ делится на 24;
в) $2^{23} + 4^{11} - 8^7$ делится на 40.

3. Докажите, что:
а) $5^7 - 1$ кратно 4; б) $5^7 + 1$ кратно 3.

4. Найдите все целочисленные решения уравнения:
а) $xy = 3$; б) $xy = 3x + y$.

5. Докажите, что дробь $\frac{7^{49} + 2^{35}}{10}$ сократима.

6. Докажите, что при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
а) $3n^2 - n + 2$ кратно 2; б) $2n^3 + 4n - 9$ кратно 3.

7. Докажите, что на графике уравнения $15x + 5y = 23$ не найдется ни одной точки с целочисленными координатами.

8. Докажите, что для любых значений $m \in \boldsymbol{Z}$ и $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения $(m - n)mn$ делится на 2.

Вариант 2

1. Из выражений $5n + 3$, $5n^2 - 35n$, $3n + 25$, $10n + 65$, $9n^2 - 15n$ выпишите те, которые:
   а) делятся на 5 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
   б) не делятся на 5 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
   в) делятся на 5 при некоторых значениях $n \in \boldsymbol{Z}$ (при каких?).

2. Докажите, что:
   а) $4^7 - 8^3$ делится на 31;
   б) $9^9 + 27^5$ делится на 84;
   в) $2^{23} - 4^{11} + 8^7$ делится на 48.

3. Докажите, что:
   а) $7^5 - 1$ кратно 6; б) $7^5 + 1$ кратно 4.

4. Найдите все целочисленные решения уравнения:
   а) $xy = 5$; б) $xy = x + 5y$.

5. Докажите, что дробь $\dfrac{7^{53} - 2^{25}}{10}$ сократима.

6. Докажите, что при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
   а) $5n^2 + 3n - 12$ кратно 2; б) $5n^3 + n - 15$ кратно 3.

7. Докажите, что на графике уравнения $21x + 7y = 24$ не найдется ни одной точки с целочисленными координатами.

8. Докажите, что для любых значений $m \in \boldsymbol{Z}$ и $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения $(m + n)mn$ делится на 2.

Вариант 3

1. Из выражений $11n - 121n^2$, $22n + 21$, $55n + 11$, $10n + 121$, $11n^2 - 2n$ выпишите те, которые:
   а) делятся на 11 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
   б) не делятся на 11 при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$;
   в) делятся на 11 при некоторых значениях $n \in \boldsymbol{Z}$ (при каких?).

2. Докажите, что:
   а) $8^7 + 4^{11}$ делится на 3;
   б) $5^7 + 25^3$ делится на 30;
   в) $3^{19} - 27^6 + 9^8$ делится на 57.

3. Докажите, что:
   а) $13^{13} - 1$ кратно 3; б) $13^{13} + 1$ кратно 7.

4. Найдите все целочисленные решения уравнения:
   а) $xy = 2$; б) $xy = x + 2y$.

5. Докажите, что дробь $\dfrac{7^{53} - 2^{37}}{5}$ сократима.

6. Докажите, что при любом значении $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
а) $n^2 - 3n - 6$ кратно 2; б) $2n^3 - 5n + 9$ кратно 3.

7. Докажите, что на графике уравнения $132x - 33y = 123$ не найдется ни одной точки с целочисленными координатами.

8. Докажите, что если 3 является делителем выражения $a - b$, то выражение $a^3 - b^3$ кратно 9.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Деление с остатком, признаки делимости, простые и составные числа

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Остатком от деления целого числа a на натуральное число b называется целое число r такое, что $(a - r) \vdots b$ и $0 \leqslant r < b$.

Теорема. Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$.

Теорема позволяет разбить все числа на классы чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на число b. Числа, принадлежащие одному классу, называют *сравнимыми по модулю* b и пишут: если $a_1 = bq_1 + r$ и $a_2 = bq_2 + r$, то $a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ b)$. Например, если $24 = 5 \cdot 4 + 4$ и $-11 = 5 \cdot (-3) + 4$, то $24 \equiv (-11) (\mathrm{mod}\ 5)$.

Алгоритм Евклида вычисления НОД двух чисел (наибольшего общего делителя) основан на том, что если $a = bq + r$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

Принцип Дирихле. Если при разбиении множества, состоящего из m элементов, на n классов $m > n$, то хотя бы в один из классов попадет более одного элемента. (*Если m кроликов сидят в n клетках и $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного кролика.*)

Простым числом называется натуральное число p, имеющее ровно два делителя: 1 и p. Число, имеющее более двух делителей, называется *составным*. Число 1 не является ни простым, ни составным. Два числа называются взаимно простыми, если их наибольшим общим делителем является число 1.

Теорема Евклида. Множество простых чисел бесконечно.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Число $a \vdots 2$ тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой.

Число $a \vdots 3$ тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа кратна 3.

Число $a \vdots 5$ тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

Число $a \vdots 9$ тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа кратна 9.

Число $a \vdots 4$ тогда и только тогда, когда число, составленное из двух последних цифр этого числа, делится на 4.

Число $a \vdots 25$ тогда и только тогда, когда число, составленное из двух последних цифр этого числа, делится на 25.

Число $a \vdots 11$ тогда и только тогда, когда разность суммы цифр числа, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

Основная теорема арифметики. Для любого натурального числа существует единственное (с точностью до порядка следования множителей) разложение этого числа на простые множители.

Подготовительный вариант

1. Среди пар чисел 166 и 116, 157 и −20, −257 и −387 найдите те, которые при делении на 3 дают равные остатки (сравнимы по модулю 3).

2. Какую цифру нужно поставить вместо звездочки в числе 817*, чтобы оно делилось:
а) на 2; в) на 5; д) на 4;
б) на 3; г) на 9; е) на 11?

3. Одно из целых чисел при делении на 5 дает остаток 4, а другое — остаток 3. Чему равен остаток при делении произведения этих чисел на 5?

4. Известно, что разность $136 - a$ делится на 7. Какой остаток при делении на 7 дает число a?

5. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД чисел:
а) 2784 и 7008; б) 5964 и 8148.

6. Известно, что при делении на 11 число a дает остаток 7. Какой остаток получится при делении на 11 значения выражения $2a^2 + 3a + 4$?

7. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 — остаток 1. Какой остаток получится при делении этого числа на 15?

8. Требуется разложить 1650 конфет в пакеты поровну так, чтобы в каждом пакете было не менее 20 конфет. Укажите все возможные способы.

9. Отцу 50 лет, произведение числа лет трех его сыновей — 4199. Сколько лет каждому сыну?

Вариант 1

1. Среди пар чисел 253 и 356, 752 и -52, -117 и -358 найдите те, которые при делении на 3 дают равные остатки (сравнимы по модулю 3).

2. Какую цифру нужно поставить вместо звездочки в числе 135*, чтобы оно делилось:
   а) на 2; в) на 5; д) на 4;
   б) на 3; г) на 9; е) на 11?

3. Одно из целых чисел при делении на 6 дает остаток 4, а другое — остаток 1. Чему равен остаток при делении произведения этих чисел на 6?

4. Известно, что разность $398 - a$ делится на 11. Какой остаток при делении на 11 дает число a?

5. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД чисел 8778 и 4940.

6. Известно, что при делении на 3 число a дает остаток 1. Какой остаток получится при делении на 3 значения выражения $4a^2 - 7a + 6$?

7. Известно, что число a при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 — остаток 1. Какой остаток получится при делении этого числа на 15?

8. Сколько делителей имеет число 5544?

Вариант 2

1. Среди пар чисел 325 и 563, 275 и -73, -717 и -448 найдите те, которые при делении на 3 дают равные остатки (сравнимы по модулю 3).

2. Какую цифру нужно поставить вместо звездочки в числе 214*, чтобы оно делилось:
   а) на 2; в) на 5; д) на 4;
   б) на 3; г) на 9; е) на 11?

3. Одно из целых чисел при делении на 6 дает остаток 4, а другое — остаток 5. Чему равен остаток при делении произведения этих чисел на 6?

4. Известно, что разность $457 - a$ делится на 11. Какой остаток при делении на 11 дает число a?

5. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД чисел 9702 и 5460.

6. Известно, что при делении на 3 число a дает остаток 2. Какой остаток получится при делении на 3 значения выражения $2a^2 - 4a + 5$?

7. Известно, что число a при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 — остаток 4. Какой остаток получится при делении этого числа на 15?

8. Сколько делителей имеет число 5148?

Вариант 3

1. Среди пар чисел 253 и 356, 842 и −42, −117 и −352 найдите те, которые при делении на 5 дают равные остатки (сравнимы по модулю 5).

2. Какую цифру нужно поставить вместо звездочки в числе 987*, чтобы оно делилось:

а) на 2;	в) на 5;	д) на 4;
б) на 3;	г) на 9;	е) на 11?

3. Одно из целых чисел при делении на 7 дает остаток 6, а другое — остаток 5. Чему равен остаток при делении произведения этих чисел на 7?

4. Известно, что разность $817 - a$ делится на 11. Какой остаток при делении на 11 дает число a?

5. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД чисел 1632 и 1190.

6. Известно, что при делении на 23 число a дает остаток 21. Какой остаток получится при делении на 23 значения выражения $a^2 - 2a + 6$?

7. Известно, что число a при делении на 13 дает остаток 3, а при делении на 3 — остаток 1. Какой остаток получится при делении этого числа на 39?

8. Сколько делителей имеет число 2450?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Рациональные числа, действительные числа, числовые промежутки

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, называются рациональными числами.

Множество рациональных чисел можно задать с помощью характеристического свойства $\boldsymbol{Q} = \left\{a \,\middle|\, a = \frac{m}{n}, m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\right\}$. Множество рациональных чисел *бесконечно*, *не ограничено*, *упорядочено*, *замкнуто* относительно четырех арифметических операций. Между любыми двумя рациональными числами p и q всегда можно найти рациональное число, например $\frac{p+q}{2}$. Таким образом, между любыми двумя рациональными числами находится бесконечное множество рациональных чисел. При этом говорят, что множество $\boldsymbol{Q}$ *плотно*.

Любое рациональное число $\frac{m}{n}$ можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби. И обратно: любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$. Число, которое нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$ или в виде бесконечной десятичной периодической дроби, не является рациональным. Такие числа называются *иррациональными*, например 0,10101101110..., число π, число, квадрат которого равен 2, и т. д. Множество иррациональных чисел *бесконечно*. Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Числовые промежутки: $[a; b]$ — отрезок, $[a; +\infty)$ и $(-\infty; b]$ — лучи[1]. Используются также обозначения отрезков без одного или двух концов: $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$ — и обозначения лучей без начала: $(a; +\infty)$ и $(-\infty; b)$. Если промежутки не имеют общих точек, то их объединением является множество, не являющееся числовым промежутком.

---

[1] Иногда в геометрии применяются алгебраические обозначения отрезков и полупрямых: $[AB]$ — отрезок AB, $[AB)$ — луч (полупрямая) AB, $(AB]$ — луч (полупрямая) BA.

Подготовительный вариант

1. Изобразите на числовой прямой множество:
   а) $[-3{,}1(01);\ 30{,}1]$; в) $(-\infty;\ 1{,}5]$;
   б) $(-5;\ 4{,}5]$; г) $(-0{,}5;\ +\infty)$.
   Опишите это множество с помощью знаков $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$.

2. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:
   а) $(-3;\ 7)$; в) $(-\infty;\ 7]$;
   б) $[-3;\ 7]$; г) $(7;\ +\infty)$.

3. Вычислите:
   а) $2{,}1(3) - 1{,}(2)$; б) $2{,}1(7) - 1{,}5(41)$.

4. Представьте в виде:
   а) бесконечной десятичной периодической дроби число $-4\frac{12}{13}$;
   б) обыкновенной дроби число $2{,}3(12)$.

5. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:
   а) $(-2;\ 6) \cap [0;\ 3]$; в) $(-\infty;\ -7] \cap (-7;\ +\infty)$.
   б) $(-\infty;\ -5] \cap (-7;\ +\infty)$;

6. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:
   а) $(-\infty;\ 5) \cup [4;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 4) \cup [5;\ +\infty)$.
   б) $(-\infty;\ 4) \cup [4;\ +\infty)$;

7. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 23.

8. Докажите, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно деления.

9. Найдите хотя бы одно:
   а) рациональное число q такое, что $\frac{3}{17} < q < \frac{5}{28}$;
   б) иррациональное число p такое, что $\frac{3}{17} < p < \frac{5}{28}$.

Вариант 1

1. Изобразите на числовой прямой множество:
   а) $[-5;\ 2]$; в) $(-\infty;\ 2]$;
   б) $(-5;\ 2]$; г) $(-5;\ +\infty)$.
   Опишите это множество с помощью знаков $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$.

2. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:
а) $(-5; 2)$; в) $(-\infty; 2]$;
б) $[-5; 2]$; г) $(-5; +\infty)$.

3. Вычислите:
а) $5{,}4(6) - 3{,}(3)$; б) $2{,}7(6) - 1{,}2(38)$.

4. Представьте в виде:

а) бесконечной десятичной периодической дроби число $-1\frac{5}{6}$;

б) обыкновенной дроби число $0{,}1(42)$.

5. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:
а) $(-\infty; 13) \cap [-1; 1]$; в) $(-\infty; -1] \cap (-1; +\infty)$.
б) $(-\infty; 11] \cap (-1; +\infty)$;

6. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:
а) $(-\infty; 1) \cup [0; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.
б) $(-\infty; 1) \cup [1; +\infty)$;

7. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 19.

8. Докажите, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно сложения.

9. Найдите хотя бы одно:

а) рациональное число q такое, что $\frac{5}{21} < q < \frac{1}{3}$;

б) иррациональное число p такое, что $\frac{5}{21} < p < \frac{1}{3}$.

Вариант 2

1. Изобразите на числовой прямой множество:
а) $[-2; 5]$; в) $(-\infty; 5]$;
б) $(-2; 5]$; г) $(-2; +\infty)$.
Опишите это множество с помощью знаков $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$.

2. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:
а) $(-2; 5)$; в) $(-\infty; 5]$;
б) $[-2; 5]$; г) $(-2; +\infty)$.

3. Вычислите:
а) $4{,}4(7) - 1{,}(3)$; б) $4{,}8(5) - 2{,}5(31)$.

4. Представьте в виде:

а) бесконечной десятичной периодической дроби число $-2\frac{1}{6}$;

б) обыкновенной дроби число 0,3(72).

5. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:
а) $(-\infty; 3) \cap [-3; 2]$;
б) $(-\infty; 3] \cap (-2; +\infty)$;
в) $(-\infty; -3] \cap (-3; +\infty)$.

6. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:
а) $(-\infty; 3) \cup [-2; +\infty)$;
б) $(-\infty; 3) \cup [3; +\infty)$;
в) $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

7. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 17.

8. Докажите, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно вычитания.

9. Найдите хотя бы одно:

а) рациональное число q такое, что $\frac{1}{6} < q < \frac{2}{9}$;

б) иррациональное число p такое, что $\frac{1}{6} < p < \frac{2}{9}$.

Вариант 3

1. Изобразите на координатной прямой Ox множество:

а) $[-\pi; 0]$;
б) $(-3; \pi]$;
в) $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$;
г) $(2\pi; +\infty)$.

Опишите это множество с помощью знаков $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$.

2. Укажите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $(-2\pi; 2{,}4)$;
б) $[-2; \pi]$;
в) $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$;
г) $(-1; +\infty)$.

3. Вычислите:
а) 3,42(6) − 1,(2);
б) 0,4(4) − 1,7(78).

4. Представьте в виде:

а) бесконечной десятичной периодической дроби число $1\frac{2}{11}$;

б) обыкновенной дроби число 0,4(06).

5. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:

а) $\left(-\infty; \frac{\pi}{3}\right) \cap [-1; 1]$; в) $(-\infty; 0] \cap (0; +\infty)$.

б) $\left(-\infty; \frac{\pi}{3}\right] \cap (1; +\infty)$;

6. Изобразите на числовой прямой и запишите в виде числового промежутка, если это возможно, множество:

а) $\left(-\infty; \frac{\pi}{3}\right) \cup [-1; 1]$; в) $(-\infty; 0] \cup (0; +\infty)$.

б) $\left(-\infty; \frac{\pi}{3}\right] \cup (1; +\infty)$;

7. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 31.

8. Докажите, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно умножения.

9. Найдите хотя бы одно:

а) рациональное число q такое, что $\frac{5}{23} < q < \frac{5}{21}$;

б) иррациональное число p такое, что $\frac{5}{23} < p < \frac{5}{21}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Арифметический квадратный корень. Функция $y = \sqrt{x}$

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. *Квадратным корнем* из числа a называется число, квадрат которого равен a.

Например, 4 и –4 — квадратные корни из 16.

Определение. *Арифметическим квадратным корнем* из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Например, 4 — арифметический квадратный корень из 16. Обозначение: $\sqrt{16} = 4$. Кратко определение арифметического квадратного корня можно записать так: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$

Из определения следует, что $\sqrt{a}$ имеет смысл при $a \geqslant 0$. Кроме того, при $a \geqslant 0$ справедливо равенство $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Легко доказать, что если $a \in N$ и $a \neq b^2$ (т. е. a не является точным квадратом), то $\sqrt{a}$ — число иррациональное.

СВОЙСТВА И ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = \sqrt{x}$

$D(y) = [0; +\infty)$, $E(y) = [0; +\infty)$, т. е. график функции расположен в первой координатной четверти.

Большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых $a > b > 0$ верно неравенство $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Верно и обратное: из неравенства $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ следует $a > b > 0$.

Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является ветвь параболы, симметричная ветви параболы $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ относительно прямой $y = x$ (рис. 1).

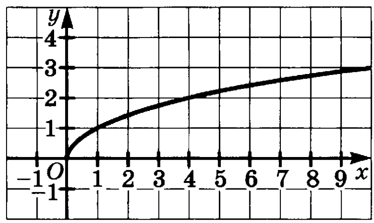


Рис. 1

Подготовительный вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $-\frac{1}{3}\sqrt{144} + \frac{5}{\sqrt{0,25}}$; б) $-\left(-2\sqrt{7}\right)^2$; в) $\sqrt{1\frac{11}{25}} - \sqrt{(-1)^2} + \sqrt{0}$.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2}x^2 = 12,5$; в) $\frac{1}{2}x^2 + 1,5 = 0$;

б) $\frac{1}{2}x^2 = 1,5$; г) $(3 - x)(3 + x) + x = (x - 2)(3 + x)$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{x\sqrt{x^2 + 2}} + 2x$; б) $\sqrt{-\frac{x}{|x|}} + 2x$?

4. Укажите все целые числа, расположенные между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{39}$.

5. Постройте в одной системе координат графики функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Запишите координаты их общих точек.

6. Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{4}$, $\left(-\sqrt{0{,}17}\right)^2$, $\sqrt{0{,}1}$, $0{,}2$ и $\sqrt{\frac{4}{33}}$.

7. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - 0{,}13 = 0$; в) $\frac{5}{\sqrt{3x+1}} = 1$;

б) $\sqrt{1-2x} = -2$; г) $\sqrt{2 - \sqrt{1 + \sqrt{x-1}}} = 1$.

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $-\frac{1}{3}\sqrt{324} + 20\sqrt{0{,}36}$; б) $-\left(-5\sqrt{3}\right)^2$; в) $\sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{(-1)^2} - \sqrt{0}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^2 = 2{,}25$; в) $\frac{1}{3}x^2 + 12 = 0$;

б) $\frac{1}{3}x^2 - 2 = 0$; г) $(1 - x)(x + 1) + x = (x - 4)(5 + x)$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+2}}$; б) $\sqrt{\frac{x}{|x|}} - 3x^2$?

4. Укажите все целые числа, расположенные между числами $\sqrt{71}$ и $\sqrt{117}$.

5. Постройте в одной системе координат графики функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $h(x) = 2 - x$. Запишите координаты их общих точек.

6. Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{5}$, $\left(-\sqrt{0{,}21}\right)^2$, $\sqrt{0{,}2}$, $0{,}18$ и $\sqrt{\frac{3}{37}}$.

7. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - 0{,}17 = 0$; в) $\frac{2}{\sqrt{1-x}} = 1$;

б) $\sqrt{7-3x} = -2$; г) $\sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{3+x}}} = 1$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $-\frac{1}{4}\sqrt{256} + 30\sqrt{0{,}64}$; б) $-\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}} - \sqrt{(-1)^2} + \sqrt{0}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^2 = 1{,}96$; в) $\frac{1}{2}x^2 + 18 = 0$;

б) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$; г) $(2 - x)(x + 2) + 2x = (x - 2)(4 + x)$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{(x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$; б) $\sqrt{\frac{|x|}{x}} + 4x^2$?

4. Укажите все целые числа, расположенные между числами $\sqrt{41}$ и $\sqrt{97}$.

5. Постройте в одной системе координат графики функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $h(x) = x - 2$. Запишите координаты их общих точек.

6. Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{2}$, $\left(-\sqrt{0{,}47}\right)^2$, $\sqrt{0{,}5}$, $0{,}7$ и $\sqrt{\frac{13}{29}}$.

7. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - 0{,}16 = 0$; в) $\frac{4}{\sqrt{3 - x}} = 1$;

б) $\sqrt{7x - 3} = -4$; г) $\sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + x}}} = 2$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

а) $-0{,}4\sqrt{289} + 5\sqrt{2{,}25}$;

б) $-\left(-3\sqrt{0{,}2}\right)^2$;

в) $\sqrt{(-2)^2} - \sqrt{0} + \sqrt{5\frac{4}{9}}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^2 = 3{,}61$; в) $0{,}5x^2 + 0{,}6 = 0$;

б) $0{,}6 - 0{,}5x^2 = 0$; г) $(3 - 2x)(2x + 3) + 2x = (2x - 4)(5 + 2x)$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{2x^2 + 3}}{(2x - 3) \cdot \sqrt{3x^2 + 2}}$; б) $2x^2 + \sqrt{\dfrac{-x}{|-x|}}$?

4. Укажите все целые числа, расположенные между числами $\sqrt{150}$ и $\sqrt{200}$.

5. Постройте в одной системе координат графики функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $h(x) = 2x - 1$. Запишите координаты общих точек графиков этих функций.

6. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{3}{4}$, $\left(-\sqrt{0{,}8}\right)^2$, $\sqrt{0{,}7}$, $0{,}7$ и $\sqrt{0{,}5}$.

7. Решите уравнение:

а) $\sqrt{-x} - 0{,}11 = 0$; в) $\dfrac{0{,}1}{\sqrt{0{,}1 - x}} = 0{,}1$;

б) $\sqrt{0{,}11 - x} + 0{,}11 = 0$; г) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}}} = 2$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Свойства арифметического квадратного корня

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема 1. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Теорема 2. Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Теорема 3. При любом значении a и натуральном k верно равенство $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$. В частности, $\sqrt{a^2} = |a|$ (не путать с тождеством $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ при $a \geqslant 0$). Если $k = 2n$, то $|a^k| = |a^{2n}| = a^{2n}$, откуда $\sqrt{a^{4n}} = a^{2n}$ при любых a. Если k нечетно, то модуль можно раскрыть лишь в зависимости от знака a. Это свойство, записанное в виде $|a^k| = \sqrt{a^{2k}}$, объясняет то, почему выражения с модулем не относят к рациональным выражениям.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

1. *Приведение «подобных» слагаемых.* Например, $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

2. *Вынесение множителя за знак радикала.* Очевидно, $\sqrt{ab^2} = |b| \cdot \sqrt{a}$ при $a \geqslant 0$.

3. *Внесение множителя под знак радикала.* Если $n > 0$, $a \geqslant 0$, то $n\sqrt{a} = \sqrt{an^2}$; если $n < 0$, $a \geqslant 0$, то $n\sqrt{a} = -\sqrt{an^2}$.

4. *Освобождение от иррациональности в числителе (или знаменателе) дроби* проводится либо умножением числителя и знаменателя на иррациональность $\sqrt{n}$: $\frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{a\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^2} = \frac{a\sqrt{n}}{n}$, либо умножением на сопряженное выражение:

$$\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{a} = \frac{\left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)}{a\left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)} = \frac{m - n}{a\left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)}.$$

Например, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

или $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{2} + 1.$

Подготовительный вариант

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2\frac{7}{9} \cdot 0{,}71 - 2\frac{7}{9} \cdot 0{,}35} + \sqrt{\frac{25{,}7^2 - 3{,}2^2}{9}}.$$

2. Вынесите множитель за знак радикала:

а) $\sqrt{242}$; б) $\sqrt{-a^3}$; в) $\sqrt{2ab^2}$, $b < 0$; г) $\sqrt{3ab^3}$.

3. Внесите множитель под знак радикала:

а) $5\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{2a}$; в) $-3a\sqrt{-a}$; г) $-a^2\sqrt{a^{-3}}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{14}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{4}{3 - \sqrt{7}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{10} - \sqrt{7}}$.

5. Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} + \sqrt{4a^2}$ при $a < 0$, $b > 0$.

6. При каком значении параметра b число $3 - \sqrt{5}$ является корнем уравнения $\frac{4}{x} = b - x$?

7. Докажите, что число a — иррациональное, если:

а) $a = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$; б) $a = \sqrt{3} + \sqrt{7}$.

Вариант 1

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 0{,}81 - 1\frac{9}{16} \cdot 0{,}17} + \sqrt{\frac{14{,}5^2 - 2{,}4^2}{49}}.$$

2. Вынесите множитель за знак радикала:

а) $\sqrt{162}$; б) $\sqrt{-2a^5}$; в) $\sqrt{4a^2b}$, $a < 0$; г) $\sqrt{-9a^3b}$.

3. Внесите множитель под знак радикала:

а) $3\sqrt{2}$; б) $a^5\sqrt{3a}$; в) $-\frac{a}{2}\sqrt{-2a}$; г) $-a^2\sqrt{a^{-1}}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{3 - \sqrt{5}}$; в) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$.

5. Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} + \sqrt{16a^2}$ при $a < 0$, $b > 0$.

6. При каком значении параметра b число $3 - \sqrt{2}$ является корнем уравнения $\frac{7}{x} = b - x$?

7. Докажите, что число a — иррациональное, если:

а) $a = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$; б) $a = \sqrt{11} + \sqrt{2}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2\frac{7}{81} \cdot 150 - 2\frac{7}{81} \cdot 6} + \sqrt{\frac{49}{42{,}5^2 - 6{,}5^2}}.$$

2. Вынесите множитель за знак радикала:

а) $\sqrt{147}$; б) $\sqrt{-3a^5}$; в) $\sqrt{9a^2b}$, $a < 0$; г) $\sqrt{-0{,}9ab^3}$.

3. Внесите множитель под знак радикала:

а) $2\sqrt{3}$; б) $a^3\sqrt{5a}$; в) $-2a^3\sqrt{-\frac{3}{a}}$; г) $-a\sqrt{a^{-3}}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$; в) $\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

5. Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} + \sqrt{9b^2}$ при $a > 0$, $b < 0$.

6. При каком значении параметра b число $3 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения $\frac{7}{x} = b - x$?

7. Докажите, что число a — иррациональное, если:

а) $a = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$; б) $a = \sqrt{11} - \sqrt{3}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot 23 - 1\frac{7}{9} \cdot 2{,}75} - \sqrt{\frac{1{,}21}{0{,}41^2 - 0{,}09^2}}.$$

2. Вынесите множитель за знак радикала:

а) $\sqrt{325}$; б) $\sqrt{-5a^3}$; в) $\sqrt{12ab^2}$, $b < 0$; г) $\sqrt{1\frac{3}{4}a^3b}$.

3. Внесите множитель под знак радикала:

а) $0{,}5\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{a^3}$; в) $-5a\sqrt{-\frac{a}{5}}$; г) $a^5\sqrt{-a^{-3}}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби и упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; в) $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

5. Упростите выражение $\sqrt{4a^2 - 4ab + b^2} - \sqrt{4b^2}$ при $a > 0$, $b < 0$.

6. При каком значении параметра b число $1 - \sqrt{5}$ является корнем уравнения $\frac{4}{x} = b - x$?

7. Докажите, что число a — иррациональное, если:

а) $a = \frac{3}{\sqrt{7}+2}$; б) $a = \sqrt{7} - \sqrt{2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Преобразование сложных радикалов

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Упрощение сложных (двойных) радикалов проводят либо с помощью выделения полного квадрата, либо с помощью метода неопределенных коэффициентов, либо с помощью тождества $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Например,

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} + 1} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1.$$

Иначе. Пусть $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$, где $a - b\sqrt{2} \geqslant 0$. Тогда по определению арифметического квадратного корня $\left(a - b\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$. Следовательно, числа a и b удовлетворяют системе $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3, \\ ab = 1. \end{cases}$ Поскольку a и b — целые числа, то из второго уравнения получаем $\begin{cases} a = 1, \\ b = 1 \end{cases}$ либо $\begin{cases} a = -1, \\ b = -1. \end{cases}$

Оба решения удовлетворяют первому уравнению системы, но первая пара не удовлетворяет условию $a - b\sqrt{2} \geqslant 0$. Следовательно, $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$.

Наконец,

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3^2 - 8}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3^2 - 8}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3 + 1}{2}} - \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Подготовительный вариант

1. Найдите $f\left(1 - \sqrt{3}\right) + f\left(1 + \sqrt{3}\right)$, если $f(x) = x^2 - 3$.
2. Сравните числа $3\sqrt{5}$ и 6,(72).

3. Докажите, что значение выражения $\sqrt{5+2} - \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ — число иррациональное.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+1}$; б) $\dfrac{7-x}{2-\sqrt{x-3}} = 3$.

5. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{12}+\sqrt{20}}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{4}$.

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{37+20\sqrt{3}} - \dfrac{13}{5+2\sqrt{3}}$.

7. Упростите выражение $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}} : \left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}} - \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

Вариант 1

1. Найдите $f\left(3-\sqrt{2}\right) + f\left(3+\sqrt{2}\right)$, если $f(x) = x^2 - 7$.

2. Сравните числа $2\sqrt{7}$ и 5,(29).

3. Докажите, что значение выражения $\sqrt{5+6} - \left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)$ — число иррациональное.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+1} - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+2}$; б) $\dfrac{10-x}{3-\sqrt{x-1}} = 5$.

5. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{7}+\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{28}+\sqrt{44}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{4}$.

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{29+4\sqrt{7}} + \dfrac{27}{1+2\sqrt{7}}$.

7. Упростите выражение $\dfrac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2} \cdot \left(\dfrac{x}{x-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)$.

Вариант 2

1. Найдите $f\left(2-\sqrt{3}\right)+f\left(2+\sqrt{3}\right)$, если $f(x)=x^2-2$.

2. Сравните числа $2\sqrt{17}$ и 8,(24).

3. Докажите, что значение выражения $\sqrt{11+2}-\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)$ — число иррациональное.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-1}-2=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+2}$; б) $\dfrac{8+x}{3-\sqrt{1-x}}=5$.

5. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{33}-\sqrt{21}+\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{44}-\sqrt{28}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{10}}{6}$.

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{46+6\sqrt{5}}+\dfrac{44}{1+3\sqrt{5}}$.

7. Упростите выражение $\left(\dfrac{x}{x-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right):\dfrac{x^2+3}{x^2-x\sqrt{3}}$.

Вариант 3

1. Найдите $f\left(\sqrt{5}-1\right)+f\left(\sqrt{5}+1\right)$, если $f(x)=4-x^2$.

2. Сравните числа $5\sqrt{3}$ и 8,(6).

3. Докажите, что значение выражения $\sqrt{3+2}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ — число иррациональное.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3-x}-1=\dfrac{3}{\sqrt{3-x}+1}$; б) $\dfrac{10-2x}{\sqrt{2x-1}+3}=2$.

5. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{6}}{\sqrt{63}-\sqrt{27}}$; б) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{11}}{4}$.

6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{49+12\sqrt{5}}-\dfrac{41}{2+3\sqrt{5}}$.

7. Докажите равенство $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Квадратные уравнения

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, b и c — некоторые числа, а x — переменная, называется квадратным.

Число a называют *старшим коэффициентом*, b — *вторым коэффициентом*, c — *свободным членом* квадратного уравнения. Если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то квадратное уравнение называется *неполным*.

Любое квадратное уравнение можно привести к виду $x^2 + px + q = 0$, разделив правую и левую части уравнения на число $a \neq 0$. Уравнение, старший коэффициент которого равен 1, называется *приведенным*.

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если в квадратном уравнении $b \neq 0$, $c = 0$, то

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{b}{a}, \end{array}\right.$$

т. е. уравнение всегда имеет два корня[1]. Если в квадратном уравнении $c \neq 0$, $b = 0$, то

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Если $-\dfrac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два корня $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$; если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет действительных корней. Если в квадратном уравнении $b = c = 0$, то уравнение $ax^2 = 0$ имеет корень $x = 0$.

ОБЩАЯ ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ $D = b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два корня, которые находят по формуле $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Если $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$ — корень уравнения. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

---

[1] В записи решения уравнения использовался знак $\Leftrightarrow$ — знак равносильности уравнений и совокупности уравнений.

ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧЕТНЫМ ВТОРЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент четный, т. е. $b = 2k$, то $D_1 = k^2 - ac$ и $x = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$ (в случае, если $D_1 \geqslant 0$).

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение:

а) $5x^2 - 12x = 0$; в) $5x^2 + 12 = 0$;

б) $5x^2 - 12 = 0$; г) $5x^2 + (2a - 3)x = 0$.

2. Найдите множество корней уравнения:

а) $3x^2 - 7x + 9 = 0$; в) $3x^2 - 7x + 2 = 0$;

б) $3x^2 - 7x + 4 = 0$; г) $x^2 + (3 + p)x + 3p = 0$.

3. Решите уравнение по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом:

а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$;

б) $3x^2 - 104x + 101 = 0$;

в) $x^2 - 2(a - 3)x - 12a = 0$.

4. При каком значении параметра a уравнение является неполным квадратным:

а) $-2x^2 - 3a^2x + 4x + 5 = 0$;

б) $ax^2 - (a^2 - 2a)x - 3 = 0$?

5. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $tx^2 - 3x + 5 = 0$;

б) $2x^2 + 3x + t = 0$;

в) $x^2 - (2t + 1)x + t^2 - t + 2 = 0$?

6. Решите с помощью замены переменной уравнение:

а) $(2x^2 - x)^2 + 1 = 0$; в) $(2x^2 - x)^2 - 2(2x^2 - x) - 3 = 0$;

б) $(2x^2 - x)^2 - 1 = 0$; г) $2x - 1 - 2\sqrt{2x - 1} = 0$.

7. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(x + 2a)(x^2 - 3x + 2) = 0$ является средним арифметическим двух других?

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $5x + 2x^2 = 0$; в) $5 - 2x^2 = 0$;

б) $5 + 2x^2 = 0$; г) $2x^2 + (a - 1)x = 0$.

2. Найдите множество корней уравнения:

а) $2x^2 - 5x + 6 = 0$; в) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

б) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; г) $x^2 - (p + 2)x + 2p = 0$.

3. Решите уравнение по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом:

а) $5x^2 - 12x + 4 = 0$; в) $x^2 - 2(a + 1)x + 4a = 0$.

б) $5x^2 - 112x + 107 = 0$;

4. При каком значении параметра a уравнение является неполным квадратным:

а) $x^2 + 2a^2x - 2x + 3 = 0$; б) $(a - 1)x^2 + 2x - a^2 + a = 0$?

5. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $tx^2 - 5x + 3 = 0$; в) $x^2 - (2t - 1)x + t^2 + t - 2 = 0$?

б) $-3x^2 + 2x + t = 0$;

6. Решите с помощью замены переменной уравнение:

а) $(x^2 - 2x)^2 + 3 = 0$; в) $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 15 = 0$;

б) $(x^2 - 2x)^2 - 9 = 0$; г) $3x^2 + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 1} = 0$.

7. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(x + a)(x^2 - 6x + 8) = 0$ является средним арифметическим двух других?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $7x - 4x^2 = 0$; в) $7 + 4x^2 = 0$;

б) $7 - 4x^2 = 0$; г) $4x^2 + (2 - a)x = 0$.

2. Найдите множество корней уравнения:

а) $2x^2 + 7x + 8 = 0$; в) $2x^2 + 7x + 3 = 0$;

б) $2x^2 - 7x + 5 = 0$; г) $x^2 + (2 - p)x - 2p = 0$.

3. Решите уравнение по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом:

а) $7x^2 + 26x - 8 = 0$; в) $x^2 - 2(1 - a)x - 4a = 0$.

б) $7x^2 - 118x + 111 = 0$;

4. При каком значении параметра a уравнение является неполным квадратным:

а) $-x^2 - 2a^2x + 8x + 1 = 0$; б) $(a + 1)x^2 - 3x + a^2 + a = 0$?

5. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $tx^2 + 5x - 2 = 0$; в) $x^2 + (2t - 1)x + t^2 - 2t - 1 = 0$?

б) $2x^2 - 3x + t = 0$;

6. Решите с помощью замены переменной уравнение:

а) $(3x^2 + 2x)^2 + 1 = 0$; в) $(3x^2 + 2x)^2 + 2(3x^2 + 2x) - 3 = 0$;

б) $(3x^2 + 2x)^2 - 1 = 0$; г) $2x^2 + 1 - 3\sqrt{2x^2 + 1} = 0$.

7. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(x - a)(x^2 - 4x + 3) = 0$ является средним арифметическим двух других?

Вариант 3

1. Решите уравнение:

а) $x - 4x^2 = 0$; в) $1 + 4x^2 = 0$;

б) $1 - 4x^2 = 0$; г) $4x^2 - (3a + 2)x = 0$.

2. Найдите множество корней уравнения:

а) $3x^2 - 5x + 6 = 0$; в) $5x^2 - 7x + 2 = 0$;

б) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; г) $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$.

3. Решите уравнение по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом:

а) $9x^2 - 6x - 8 = 0$; в) $x^2 + 2(a - 2)x - 8a = 0$.

б) $9x^2 - 132x + 123 = 0$;

4. При каком значении параметра a уравнение является неполным квадратным:

а) $x^2 + a^2x - x - 1 = 0$; б) $(a + 1)x^2 - x + a^2x - a = 0$?

5. При каких значениях параметра m имеет единственный корень уравнение:

а) $mx^2 + 7x + 2 = 0$; в) $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 1 = 0$?

б) $-2x^2 + 3x + m = 0$;

6. Решите с помощью замены переменной уравнение:

а) $(2x^2 - 1)^2 + 1 = 0$; в) $(2x^2 - 1)^2 - 8(2x^2 - 1) + 7 = 0$;

б) $(2x^2 - 1)^2 - 1 = 0$; г) $2x^2 - 1 - \sqrt{2x^2 - 1} = 0$.

7. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(x - a)(x^2 - 6x + 8)$ является средним геометрическим двух других?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Биквадратные уравнения. Решение задач с помощью квадратных уравнений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным*. Биквадратные уравнения решаются введением новой переменной $x^2 = t$.

Решение задач с помощью уравнений, как и вообще решение любых практических задач средствами математики, сводится к трем основным этапам:

I — формализация условия задачи, перевод условия на «математический язык»;

II — решение математической задачи;

III — интерпретация полученного результата в рамках условия задачи.

Этап формализации условия задачи включает в себя выбор неизвестной или нескольких неизвестных (если предполагается составить систему уравнений или неравенств) и начинается со слов «Пусть x...». Перед тем как записать уравнение (неравенство, систему уравнений или неравенств), записывают: «Зная, что по условию...». Это предложение является «переходом» от условия задачи к математической модели (уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств). Иногда «литературный» стиль этапа формализации сопровождают (и даже заменяют!) составлением различных таблиц и схем.

Второй этап — решение уравнения (неравенства) или системы уравнений (неравенств).

Третий этап — интерпретация полученного результата. Он включает в себя проверку полученных результатов относительно условия конкретной задачи и запись ответа.

Указанный метод решения практических задач называют *методом математического моделирования*.

Подготовительный вариант

1. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 14x^2 + 13 = 0$;

б) $7x^4 + 6x^2 - 1 = 0$;

в) $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.

2. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 61, а разность катетов — 49.

3. В период военных учений было создано несколько командных пунктов, каждый из которых имел линию связи со всеми остальными. Сколько командных пунктов было организовано, если количество линий связи равно 120?

4. Население города N за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

5. В координатной плоскости xOy построена трапеция $ABCD$. Вершины A и D лежат на оси абсцисс, а вершины B и C — на графике функции $y = \sqrt{x}$ (точка A — проекция точки B, D — точки C на ось абсцисс). Найдите расстояние между точками A и D, если $AB = \sqrt{3}$, а большая диагональ равна $\sqrt{5}$.

Вариант 1

1. Решите биквадратное уравнение:
а) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$; в) $x^4 + 11x^2 + 18 = 0$.
б) $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$;

2. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 25, а один из катетов на 17 больше другого.

3. Сколько сторон у многоугольника, если в нем можно провести 65 диагоналей?

4. Положив в банк 5000 р., вкладчик через два года получил 5408 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

5. В координатной плоскости xOy построена трапеция $ABCD$. Вершины A и D лежат на оси абсцисс, а вершины B и C — на графике функции $y = \sqrt{x}$ (точка A — проекция точки B, D — точки C на ось абсцисс). Найдите расстояние между точками A и D, если $AB = 2$, а большая диагональ равна 4.

Вариант 2

1. Решите биквадратное уравнение:
а) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$; в) $x^4 + 11x^2 + 28 = 0$.
б) $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$;

2. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 17, а разность катетов равна 7.

3. Сколько сторон у многоугольника, если в нем можно провести 77 диагоналей?

4. Положив в банк 4000 р., вкладчик через два года получил 4410 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

5. В координатной плоскости xOy построена трапеция $ABCD$. Вершины A и D лежат на оси абсцисс, а вершины B и C — на графике функции $y = \sqrt{x}$ (точка A — проекция точки B, D — точки C на ось абсцисс). Найдите расстояние между точками A и D, если $AB = 2$, а большая диагональ равна $2\sqrt{6}$.

Вариант 3

1. Решите биквадратное уравнение:

   а) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$; в) $x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.

   б) $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$;

2. Найдите площадь прямоугольника, если его диагональ равна 26 см, а полупериметр равен 34 см.

3. Во время деловой встречи один из приглашенных, любитель математики, подсчитал, что было произведено 78 приветственных рукопожатий. Сколько человек присутствовало на этой встрече?

4. Сбербанк в конце года начисляет один и тот же процент к сумме, находящейся у вкладчика. Через два года на сумму в 5000 денежных единиц было начислено 202 единицы. Какой процент начисляет банк ежегодно?

5. Вершины A и C квадрата $ABCD$ лежат на графике функции $f(x) = \dfrac{2}{x}$, а вершины B и D — на биссектрисе второго и четвертого координатных углов. Точка пересечения диагоналей квадрата совпадает с началом координат. Найдите площадь квадрата.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

Свойство корней квадратного уравнения (теорема Виета), симметрические многочлены, разложение квадратного трехчлена на множители

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема Виета. Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Обратная теорема. Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют системе $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases}$ то они являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема 1. Если сумма коэффициентов квадратного уравнения равна 0, то один из корней уравнения равен 1, а второй находится по формуле $\frac{c}{a}$.

Теорема 2. Если сумма старшего коэффициента и свободного члена квадратного уравнения равна среднему коэффициенту, то один из корней равен -1, а второй находится по формуле $-\frac{c}{a}$.

Определение. Выражение с двумя переменными называется *симметрическим* относительно этих переменных, если при перестановке этих переменных получается тождественно равное ему выражение.

Например, $a + b$, $a^2 + b^2$, ab, $(a - b)^{2n}$, где $n \in N$, и т. п. Очевидно, сумма двух симметрических многочленов является симметрическим многочленом.

Любой симметрический многочлен с двумя переменными можно выразить через простейшие симметрические многочлены $a + b$ и ab. Например, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$.

Определение. *Корнем квадратного трехчлена* называется значение переменной, при котором значение квадратного трехчлена равно нулю.

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то его можно разложить на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Верно и обратное.

Подготовительный вариант

1. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если:
   а) его корни равны 2 и −5;
   б) его корни равны 2 и $-\frac{2}{3}$;
   в) один из его корней равен $2 - \sqrt{3}$.
2. Один из корней уравнения $5x^2 + x + c = 0$ равен −1,2. Чему равен второй корень?
3. Найдите коэффициент q уравнения $x^2 - 6x + q = 0$, если один из его корней в два раза больше другого.
4. Уравнение $x^2 + px - 15 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите через коэффициент p сумму:
   а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; г) $x_1^3 + x_2^3$.
5. Разложите на множители квадратный трехчлен:
   а) $x^2 - 6x + 8$; б) $8x^2 - 6xy + y^2$; в) $x^2 - 2x - 1$.
6. Сократите дробь $\frac{10x^2 - 13x - 3}{-2x^2 + x + 3}$ и найдите ее значение при $x = -6{,}2$.
7. Упростите выражение
   $$\frac{a + 40}{a^3 - 16a} : \left(\frac{a - 4}{3a^2 + 11a - 4} - \frac{16}{16 - a^2}\right).$$

Вариант 1

1. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если:
   а) его корни равны −1 и 12;
   б) его корни равны 3 и $-\frac{1}{3}$;
   в) один из его корней равен $3 - \sqrt{2}$.
2. Один из корней уравнения $4x^2 - x + c = 0$ равен 1,25. Чему равен второй корень?
3. Найдите коэффициент q уравнения $x^2 - 10x + q = 0$, если один из его корней в четыре раза больше другого.
4. Уравнение $x^2 + px - 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите через коэффициент p сумму:
   а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; г) $x_1^3 + x_2^3$.

5. Разложите на множители квадратный трехчлен:
а) $x^2 - 7x + 10$; б) $6x^2 - xy - 12y^2$; в) $x^2 - 4x - 2$.

6. Сократите дробь $\dfrac{9x^2 - 6x + 1}{6x^2 + x - 1}$ и найдите ее значение при $x = -1\frac{1}{6}$.

7. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-4}{a^2-2a+1} - \frac{a+2}{a^2+a-2}\right) : \frac{1}{(2a-2)^2}.$$

Вариант 2

1. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если:
а) его корни равны -1 и 7;
б) его корни равны -3 и $\frac{1}{3}$;
в) один из его корней равен $3 + \sqrt{2}$.

2. Один из корней уравнения $4x^2 - x + c = 0$ равен $-0{,}75$. Чему равен второй корень?

3. Найдите коэффициент q уравнения $x^2 - 7x + q = 0$, если один из его корней в 2,5 раза больше другого.

4. Уравнение $x^2 + px - 3 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите через коэффициент p сумму:

а) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$; г) $x_1^3 + x_2^3$.

5. Разложите на множители квадратный трехчлен:
а) $x^2 - 10x + 16$; б) $6x^2 + xy - 12y^2$; в) $x^2 + 4x - 2$.

6. Сократите дробь $\dfrac{8x^2 - 2x - 1}{16x^2 + 8x + 1}$ и найдите ее значение при $x = -1{,}25$.

7. Упростите выражение

$$\left(\frac{a+2}{a^2-a-6} - \frac{a}{a^2-6a+9}\right) : \frac{1}{(2a-6)^2}.$$

Вариант 3

1. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если:

   а) его корни равны -3 и 4;

   б) его корни равны -3 и $\frac{3}{4}$;

   в) один из его корней равен $2 + \sqrt{5}$.

2. Один из корней уравнения $7x^2 - 2x + c = 0$ равен $-\frac{5}{7}$. Чему равен второй корень?

3. Найдите коэффициент q уравнения $x^2 + 6x + q = 0$, если один из его корней на 2 больше другого.

4. Уравнение $x^2 + px + 5 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите через коэффициент p сумму:

   а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; г) $x_1^3 + x_2^3$.

5. Разложите на множители квадратный трехчлен:

   а) $x^2 + 6x + 8$; б) $6x^2 + 7xy - 20y^2$; в) $4x^2 - 2x - 1$.

6. Сократите дробь $\frac{-15x^2 + 13x - 2}{3x^2 - 8x + 4}$ и найдите ее значение при $x = 4{,}2$.

7. Упростите выражение

   $$\frac{a - 4}{a^3 - a} : \left(\frac{a - 1}{2a^2 + 3a + 1} - \frac{1}{a^2 - 1}\right).$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16

Решение дробно-рациональных уравнений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Уравнение вида $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, где $p(x)$ и $q(x)$ — целые выражения, называется *дробно-рациональным*. Уравнения, приводимые посредством тождественных преобразований к уравнениям вида $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, также называют дробно-рациональными.

Дробно-рациональные уравнения решают либо с использованием равносильного перехода и условия равенства дроби нулю, либо с использованием неравносильного перехода к уравнению-следствию и обязательной проверкой корней.

1-й способ: сначала все слагаемые переносят в одну часть, приводят дроби к общему знаменателю и представляют уравнение в стандартном виде $\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0, \\ q(x) \neq 0, \end{cases}$ после чего отдельно решают первое уравнение и второе неравенство. Иногда вместо решения второго неравенства выполняют проверку корней первого уравнения, подставляя их во второе неравенство.

2-й способ: уравнение умножают на общий знаменатель всех дробей, решают полученное целое уравнение и проверяют, не обращают ли найденные корни знаменатель в нуль.

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение $\frac{4x - 6}{x + 2} - \frac{x}{x + 1} = \frac{9}{(x + 1)(x + 2)}$, представив его в стандартном виде $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ и используя условие равенства дроби нулю.

2. Решите уравнение $\frac{1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{1}{x - 2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 8}$, используя переход к уравнению-следствию и проверку корней.

3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = x + 1$.

4. Найдите все неотрицательные решения уравнения $\frac{x}{x + 1} - \frac{1}{x - 3} = x$.

5. Решите уравнение $\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} + \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 3} = 10$, предварительно выделив из дробей целые части.

6. Решите уравнение $17 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 8$.

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$, представив его в стандартном виде $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ и используя условие равенства дроби нулю.

2. Решите уравнение $\frac{1}{x+6} + \frac{7}{x-3} = \frac{5}{x-6}$, используя переход к уравнению-следствию и проверку корней.

3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = 2x - x^2$.

4. Найдите все неотрицательные решения уравнения
$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-x-4} - \frac{x}{x^2-x-4}.$$

5. Решите уравнение $\frac{x^2+x+3}{x+1} + \frac{x^2-x+1}{x-1} = 6$, предварительно выделив из дробей целые части.

6. Решите уравнение $2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{16}{x^2-16} + \frac{x}{x+4} = \frac{2}{x-4}$, представив его в стандартном виде $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ и используя условие равенства дроби нулю.

2. Решите уравнение $\frac{1}{x-6} + \frac{4}{x+6} = \frac{3}{x-4}$, используя переход к уравнению-следствию и проверку корней.

3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \frac{2}{x}$ и $y = x^2 - 2x + 1$.

4. Найдите все неотрицательные решения уравнения
$$\frac{x}{2x-1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{2}{x^2-2x-6} - \frac{x}{x^2-2x-6}.$$

5. Решите уравнение $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} + \frac{x^2 + x + 6}{x + 1} = 8$, предварительно выделив из дробей целые части.

6. Решите уравнение $2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = 16$.

Вариант 3

1. Решите уравнение $\frac{x}{x + 5} + \frac{x + 5}{x - 5} = \frac{50}{x^2 - 25}$, представив его в стандартном виде $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ и используя условие равенства дроби нулю.

2. Решите уравнение $\frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 + 27} - \frac{1}{x + 3} = \frac{2}{x^2 - 3x + 9}$, используя переход к уравнению-следствию и проверку корней.

3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 4 - x^2$.

4. Найдите все неотрицательные решения уравнения
$\frac{x}{2x - 1} - 1 = \frac{6}{x - 5}$.

5. Решите уравнение $\frac{2x^2 + x + 3}{2x + 1} + \frac{2x^2 - x - 1}{2x - 1} = 2$, предварительно выделив из дробей целые части.

6. Решите уравнение $3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{3}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17

Решение задач с помощью дробно-рациональных уравнений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Решение задач с помощью дробно-рациональных уравнений проводится *методом математического моделирования*, состоящим из трех этапов:

I — формализация условия задачи, перевод условия на «математический язык» (составление дробно-рационального уравнения);

II — решение дробно-рационального уравнения вместе с проверкой его корней;

III — интерпретация полученного результата в рамках условия задачи вместе с проверкой корней дробно-рационального уравнения на их соответствие условию задачи.

Таким образом, при решении задач с использованием дробно-рационального уравнения выполняются фактически *две проверки корней*.

Подготовительный вариант

1. Знаменатель обыкновенной несократимой дроби на 5 больше числителя. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 2, то дробь увеличится на $\frac{1}{8}$. Найдите эту дробь.

2. Катер на путь длиной 72 км по течению реки и на такой же путь обратно затратил 7 ч 30 мин. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч.

3. Для того чтобы вспахать поле, первому трактористу требуется на 4 дня меньше, чем второму. Если сначала 7 дней будет работать первый тракторист, а затем к нему присоединится второй, то через 5 дней совместной работы они закончат вспашку поля. За какое время может вспахать это поле каждый тракторист, работая отдельно?

4. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 210 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Автомобиль, выехавший из пункта A, прибыл в пункт B через 2 ч после встречи, а автомобиль, выехавший из B, прибыл в пункт A через полчаса после встречи. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча?

5. Во время соревнований по стрельбе первая команда поразила на 72 мишени больше второй. Определите, сколько мишеней поразила каждая команда, если отношение количества мишеней, пораженных первой командой, к количеству мишеней, пораженных второй командой, равно отношению суммы мишеней, пораженных первой командой, и утроенного количества мишеней, пораженных второй командой, к разности мишеней, пораженных первой и второй командами.

Вариант 1

1. Знаменатель несократимой дроби на 7 больше числителя. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 2, то дробь увеличится на $\frac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

2. Катер, собственная скорость которого 8 км/ч, прошел 15 км по течению реки и такое же расстояние против течения. Найдите скорость течения реки, если время, затраченное на весь путь, равно 4 ч.

3. На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине ее можно сделать на 15 мин быстрее, чем на второй?

4. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 18 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Скорость одного из них на 5 км/ч меньше скорости другого. Велосипедист, который первым прибыл в пункт B, сразу же повернул обратно и встретил другого велосипедиста через 1 ч 20 мин после выезда из пункта A. На каком расстоянии от пункта B произошла встреча?

5. Две машинистки, работая вместе, печатают в час 44 страницы текста. Первые 25% двухсотстраничной рукописи печатала первая машинистка, затем к ней присоединилась вторая, а последние 20% текста печатала только вторая машинистка. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка, если на перепечатывание всей рукописи ушло 6 ч 40 мин и первая машинистка работает быстрее второй?

Вариант 2

1. Знаменатель несократимой дроби на 3 больше числителя. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 1, то дробь увеличится на $\frac{1}{10}$. Найдите эту дробь.

2. Спортивная лодка прошла 45 км против течения и такое же расстояние по течению, затратив на весь путь 14 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.

3. На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 20 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине ее можно сделать на 30 мин быстрее, чем на второй?

4. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 6 км, одновременно выходит пешеход и выезжает велосипедист. Скорость велосипедиста на 10 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист доезжает до пункта B, сразу же поворачивает обратно и встречает пешехода через 36 мин после выезда из пункта A. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча?

5. Два экскаваторщика выкопали котлован объемом 2000 м^3. Сначала первый экскаваторщик, работая в одиночку, выполнил 20% всей работы; затем его сменил второй и выполнил еще 30% от всего объема работы. На первую половину работы ушло на 25 ч больше, чем на вторую, когда экскаваторщики работали вместе. Какой объем грунта каждый экскаватор выбирает за 1 ч, если два экскаватора вместе выбирают 100 м^3, а производительность первого выше, чем второго?

Вариант 3

1. Знаменатель несократимой дроби на 1 больше числителя. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 1, то дробь увеличится на $\frac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

2. Туристы на моторной лодке отправились по реке от одной пристани к другой и через 2,5 ч вернулись обратно, затратив на стоянку 25 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 20 км/ч, а расстояние между пристанями 20 км.

3. Две трубы при совместном действии могут наполнить бассейн за 4 ч. Если бы сначала первая труба наполнила половину бассейна, а затем ее перекрыли и открыли вторую, то наполнение бассейна было бы закончено через 9 ч. За сколько часов может наполнить этот бассейн каждая труба в отдельности?

4. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 27 км. Через час велосипедисты встречаются и, не останавливаясь, продолжают ехать с той же скоростью. Первый прибывает в пункт B на 27 мин позже, чем второй в пункт A. Определите скорость каждого велосипедиста.

5. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется водой за 8 ч. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго — в 1,6 раза, и при одновременной работе обоих насосов бассейн стал наполняться за 6 ч. За какое время наполнится бассейн при работе только первого насоса после ремонта?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18

Свойства числовых неравенств, оценка значений выражений, доказательство неравенств

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Если $a - b > 0$, то $a > b$, если $a - b < 0$, то $a < b$.

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (*транзитивность отношения «меньше»*).

Если $a < b$, $c \in \mathbf{R}$, то $a + c < b + c$ (*если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство*).

Если $a < b$, $c > 0$, то $ac < bc$ (*если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство*).

Если $a < b$, $c < 0$, то $ac > bc$ (*если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство*).

Если $0 < a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$ (*если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство*).

Если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$ (*если перемножить почленно верные неравенства одного знака, в которых левые и правые части — положительные числа, то получится верное неравенство*).

Если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Для любых a и b $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. В частности, если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ (*сумма двух взаимно обратных чисел не меньше числа 2*).

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (*частный случай неравенства Коши — Буняковского для двух неотрицательных чисел*).

Подготовительный вариант

1. Сравните числа a и b, если их разность $a - b$ равна:

а) $\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{17}\right)^{117}$; б) $\left(\frac{13}{17} - \frac{4}{5}\right)^{112}$.

2. Известно, что $a < b$. Расположите в порядке убывания числа:

$a,\ a - 2{,}65,\ b + 0{,}04,\ b,\ a - 2\frac{2}{3}$.

3. Сколько целых значений может принимать переменная α, если $2{,}25 < \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha} < 2{,}5$?

4. Верно ли, что при любом значении переменной x является истинным неравенство:

а) $(2x - 1)(3x + 2) - (2x + 1)(2x - 3) > x(x + 5)$;

б) $2x^2 - 2x + 1 > 4x - 5$?

5. Зная, что $2 < p < 3$ и $4 < q < 5$, оцените значение выражения:

а) $5p + q$; б) $2q - p$; в) $\frac{pq}{2}$; г) $\frac{p}{2q}$.

6. Докажите, что если $a > b$, $b > 3$, то $2a + b > 2b + 1$.
7. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $a - 2ab$, если $-2 \leqslant a \leqslant -1$, $0{,}2 \leqslant b \leqslant 0{,}8$.
8. Докажите, что если $a > 0$, то $\frac{2a + 1}{4} \geqslant \frac{2a}{2a + 1}$.

Вариант 1

1. Сравните числа a и b, если их разность $a - b$ равна:

а) $\left(\frac{13}{14} - \frac{14}{15}\right)^{217}$; б) $\left(\frac{13}{19} - \frac{13}{17}\right)^{274}$.

2. Известно, что $a < b$. Расположите в порядке убывания числа:

$a,\ a - 0{,}6,\ b + 2{,}4,\ b,\ a - \frac{3}{7}$.

3. Сколько целых значений может принимать переменная x, если $3{,}25 < \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x} < 3{,}5$?

4. Верно ли, что при любом значении переменной x является истинным неравенство:

а) $(3 - 2x)(5 - x) - (6x + 1)^2 < 5(4 - x)$;

б) $(5x - 2)(3x + 1) - (x - 4)(x + 4) > 7x^2 - x + 14$?

5. Зная, что $2 < p < 3$ и $3 < q < 4$, оцените значение выражения:

а) $p + 2q$; б) $2q - p$; в) $3pq$; г) $\frac{p^2}{4q}$.

6. Докажите, что если $a > b$, $b > 2$, то $10a > 3b + 14$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $a + 4ab$, если $-2 \leqslant a \leqslant -1$, $-0{,}22 \leqslant b \leqslant 2{,}4$.

8. Докажите, что если $a > 0$, то $\frac{a+3}{2} \geqslant \frac{6a}{a+3}$.

Вариант 2

1. Сравните числа a и b, если их разность $a - b$ равна:

а) $\left(\frac{17}{18} - \frac{18}{19}\right)^{518}$; б) $\left(\frac{11}{13} - \frac{11}{12}\right)^{273}$.

2. Известно, что $a < b$. Расположите в порядке возрастания числа: a, $a - 0{,}6$, $b + 1{,}1$, b, $a - \frac{4}{7}$.

3. Сколько целых значений может принимать переменная x, если $1{,}25 < \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x} < 1{,}5$?

4. Верно ли, что при любом значении переменной x является истинным неравенство:

а) $(12x + 1)(x - 1) - (x - 12)(x + 12) > x(x - 11)$;

б) $(9x - 1)(2x + 2) + (3x - 4)^2 > 4x(x - 2) + 14$?

5. Зная, что $2 < p < 3$ и $3 < q < 4$, оцените значение выражения:

а) $2p + q$; б) $q - 2p$; в) $5pq$; г) $\frac{p^2}{3q}$.

6. Докажите, что если $a < b$, $b < 3$, то $13a < 4b + 27$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $a - ab$, если $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{7}$, $1{,}7 \leqslant b \leqslant 2{,}8$.

8. Докажите, что если $a > 0$, то $\frac{4a}{2a+1} \leqslant \frac{2a+1}{2}$.

Вариант 3

1. Сравните числа a и b, если их разность $a - b$ равна:

а) $\left(\frac{2003}{2004} - \frac{2004}{2005}\right)^{2006}$; б) $\left(\frac{101}{113} - \frac{101}{112}\right)^{101}$.

2. Известно, что $a < b$. Расположите в порядке возрастания числа: a, $a - 3{,}2$, $b + 1{,}1$, $b + \frac{\pi}{3}$, b, $a - \pi$.

3. Сколько целых значений может принимать переменная x, если $1{,}2 < \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} < 1{,}5$?

4. Верно ли, что при любом значении переменной x является истинным неравенство:

а) $(5x - 3)(x + 2) - (2x - 3)(2 - x) > (1 + 2x)(2x - 1)$;

б) $(x - 2)(x - 3) + 4 > x(3 - x)$?

5. Зная, что $4 < p < 5$ и $9 < q < 10$, оцените значение выражения:

а) $2p + q$; б) $q - 2p$; в) $-2pq$; г) $\frac{p^2}{2q - p}$.

6. Докажите, что если $a < b$, $b < 2$, то $8a < 5b + 7$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $a - 2ab$, если $-3 \leqslant a \leqslant -0{,}5$, $0{,}5 \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}$.

8. Докажите, что если $a > 0$, то $\frac{3a + 2}{4} \geqslant \frac{6a}{3a + 2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 19

Решение неравенств с одной переменной

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. *Решением неравенства с одной переменной* называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Определение. Неравенства, множества решений которых совпадают, называются *равносильными*.

Определение. *Областью определения неравенства* с одной переменной (*областью допустимых значений переменной в неравенстве*) называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если:

1) из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

3) в какой-либо части неравенства выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Определение. Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$, где a и b — некоторые числа, x — переменная, называются *линейными*.

При $a > 0$ решением линейного неравенства $ax > b$ является любое число из промежутка $\left(\frac{b}{a};\ +\infty\right)$, при $a < 0$ — любое число из промежутка $\left(-\infty;\ \frac{b}{a}\right)$. Если $a = 0$, $b > 0$, то неравенство не имеет решений (решением является пустое множество), если $a = 0$, $b \leqslant 0$, то решением является любое число. Аналогично решается неравенство вида $ax < b$.

Подготовительный вариант

1. Из множества чисел $\{-2; -1; 0; 1; 3\}$ выделите подмножество, состоящее из решений неравенства $|1 - |x + 1|| > 0$.

2. Решите неравенство $(2a - 3)x < x + 3$ при:
а) $a = 3$; б) $a = 2$; в) $a = 1$.

3. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{3}{8} - 0{,}4\right) \cdot x < \left(0{,}4 - \frac{3}{8}\right)$.

4. При каких значениях аргумента график функции $y = \frac{2x}{3} - 2$ находится выше графика функции $y = 8 - x$?

5. Решите неравенство:
а) $\frac{8x + 3}{16} - \frac{2x - 5}{3} \geqslant \frac{11 - 7x}{12}$;
б) $(4x - 3)^2 + (7x + 1)^2 < (5x - 4)(13x + 1)$.

6. Постройте график функции $f(x) = 3 - 2x$ и определите по графику, при каких значениях аргумента $f(x) \leqslant 5$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $2ax + 3 < x + 2$ имеет такое же множество решений, что и неравенство $x > \frac{1}{1 - 2a}$?

8. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + 2c^2 \geqslant 4abc$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Вариант 1

1. Из множества чисел $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$ выделите подмножество, состоящее из решений неравенства $|2 - (x + 1)^2| > 1$.

2. Решите неравенство $(2 - a)x > x + 1$ при:
а) $a = 3$; б) $a = 1$; в) $a = -1$.

3. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{5}{17} - 0{,}4\right) \cdot x > 0{,}4 - \frac{5}{17}$.

4. При каких значениях аргумента график функции $y = \frac{x}{3} - 21$ находится выше графика функции $y = 4 - 3x$?

5. Решите неравенство:
а) $\frac{x+2}{15} - \frac{7x-1}{5} \leqslant \frac{5-2x}{9}$;
б) $(2x - 1)^2 + (3x + 2)^2 > 13 \cdot (x - 5)^2$.

6. Постройте график функции $f(x) = 2x + 1$ и определите по графику, при каких значениях аргумента $f(x) \geqslant 3$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $2ax < 3x + 6$ имеет такое же множество решений, что и неравенство $x > \frac{6}{2a-3}$?

8. Докажите неравенство $a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \geqslant 4$ при $a > 0$.

Вариант 2

1. Из множества чисел $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ выделите подмножество, состоящее из решений неравенства $|2 - (1 - x)^2| > 1$.

2. Решите неравенство $(2a + 1)x > x - 2$ при:
а) $a = 1$; б) $a = 0$; в) $a = -1$.

3. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\left(0{,}4 - \frac{7}{17}\right) \cdot x > \frac{7}{17} - 0{,}4$.

4. При каких значениях аргумента график функции $y = \frac{4x}{3} + 2$ находится ниже графика функции $y = 2 - 5x$?

5. Решите неравенство:

а) $\frac{x+1}{4} - \frac{4x+1}{5} \leqslant \frac{7-3x}{10}$;

б) $(3x-2)^2 + (5x+1)^2 > 34 \cdot (x-3)^2$.

6. Постройте график функции $f(x) = 2x - 1$ и определите по графику, при каких значениях аргумента $f(x) \leqslant 3$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $6 + 4ax < 5x$ имеет такое же множество решений, что и неравенство $x > \frac{6}{5-4a}$?

8. Докажите неравенство $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geqslant 8$ при $a > 0$.

Вариант 3

1. Из множества чисел $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$ выделите подмножество, состоящее из решений неравенства $|x^2 - 4|x| + 3| < 1$.

2. Решите неравенство $(1 - 2a)x < x - 1$ при:
а) $a = 2$; б) $a = 0$; в) $a = -1$.

3. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\left(0{,}8 - \frac{5}{6}\right) \cdot x \leqslant \frac{5}{6} - 0{,}8$.

4. При каких значениях аргумента график функции $y = \frac{x}{2} + 7$ находится ниже графика функции $y = 13 - 4{,}5x$?

5. Решите неравенство:

а) $\frac{x-2}{5} - \frac{3x+2}{6} \leqslant \frac{2-3x}{3}$;

б) $(4x+1)^2 + (2-3x)^2 < (5x+4)^2$.

6. Постройте график функции $f(x) = 3 - 4x$ и определите по графику, при каких значениях аргумента $f(x) \leqslant -1$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $3 - ax > 4x - 2$ имеет такое же множество решений, что и неравенство $x > \frac{5}{a+4}$?

8. Докажите неравенство $a^6 + \frac{1}{a^4} + \frac{2}{a} \geqslant 4$ при $a > 0$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 20

Неравенства, содержащие модуль, системы и совокупности неравенств

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. *Решением системы неравенств* с одной переменной называется значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств — значит найти все ее решения (множество решений) или доказать, что их нет. *Множеством решений системы* является *пересечение* множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

Определение. *Решением совокупности неравенств* с одной переменной называется значение переменной, которое обращает в верное числовое неравенство хотя бы одно неравенство совокупности.

Множеством решений совокупности является *объединение* множеств решений неравенств, входящих в совокупность.

Иногда нестрогое неравенство заменяют совокупностью строгого неравенства и равенства. Например, неравенство $f(x) \leqslant a$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) < a, \\ f(x) = a. \end{array}\right.$

ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

Неравенства вида $|f(x)| < a$, где $a > 0$, сводятся к двойному неравенству $-a < f(x) < a$ или к системе $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$

Если $a \leqslant 0$, то неравенство $|f(x)| < a$ не имеет решений.

Неравенства вида $|f(x)| > a$, где $a > 0$, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$

Если $a = 0$, то неравенство можно записать в виде совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ f(x) < 0 \end{array}\right.$$

или в виде неравенства $f(x) \neq 0$. Если $a < 0$, то решением неравенства $|f(x)| > a$ будут являться все числа, входящие в область допустимых значений переменной в неравенстве.

Подготовительный вариант

1. Среди чисел -3; 4; 7; 10 найдите решения системы неравенств
$$\begin{cases} 2-(3+2x) > 3-(3x-2), \\ |3-x| < 6. \end{cases}$$

2. Решите двойное неравенство $-1 < 3 - 2x < 3$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
а) $\sqrt{-x-100}$; б) $\sqrt{3-x} + \dfrac{x}{\sqrt{2x-3}}$?

4. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:
а) $\begin{cases} 9-2x > 4-3(x-1), \\ 6x-4(x-1) > 3+x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x}{5} \leqslant -\dfrac{2}{15}. \end{cases}$

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $2x - a \leqslant ax - 1$.

6. При $a = -2$; -1; 1 решите неравенство:
а) $|x-2| < a+1$; б) $|x-2| > a+1$.

7. Решите совокупность неравенств:
а) $\left[\begin{array}{l} 2 < x < 5, \\ x \leqslant 2; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{2} - \dfrac{2-x}{7} > 1, \\ -3x+1 < x+2. \end{array}\right.$

8. При каких значениях параметра x система $\begin{cases} 2a-5 > x-3, \\ 4a-7 < x+3 \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 1

1. Среди чисел -3; -2; 1 найдите решения системы неравенств
$$\begin{cases} 6-(3-2x) \leqslant x-(3+2x), \\ |x+1| < 3. \end{cases}$$

2. Решите двойное неравенство $-7 < 1 - 4x < 2$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
а) $\sqrt{-x-0{,}02}$; б) $\sqrt{1-2x} + \dfrac{3x}{\sqrt{2x-5}}$?

4. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 7x + 4 > 3x, \\ 3x - 1 < 5 + x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant 4y + 6, \\ \dfrac{y}{2} - 1 < 0, \\ 7 - y < 8. \end{cases}$

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $x - 2a \leqslant 1 - ax$.

6. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 3 < x < 7, \\ x \leqslant 3; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x}{4} > 0, \\ (x + 3)(x - 4) \leqslant x^2. \end{array}\right.$

7. При $a = -2$; 1 решите неравенство:

а) $|x + 1| < 2a + 1$; б) $|x + 1| > 2a + 1$.

8. При каких значениях параметра x система $\begin{cases} a + 2 > x + 1, \\ 2a - 3 < x - 2 \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 2

1. Среди чисел -1; 1; 4 найдите решения системы неравенств

$\begin{cases} 2 - (1 + x) > 4 - (3x - 2), \\ |2 - x| < 3. \end{cases}$

2. Решите двойное неравенство $-1 < 5 - 4x < 3$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{-x + 0{,}03}$; б) $\sqrt{4 - 3x} + \dfrac{5x}{\sqrt{x - 3}}$?

4. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 3 > x - 1, \\ 9x - 5 < 4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2 - y < 4, \\ \dfrac{y}{2} - 2 < 0, \\ 2y \leqslant 9y + 21. \end{cases}$

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $x + a \geqslant ax + 2$.

6. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}-1 < x < 9, \\ x \leqslant -1;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}(x+2)(x-3) \leqslant x^2, \\ \dfrac{4x+1}{7} - \dfrac{x}{2} > 0.\end{array}\right.$

7. При $a = -2; 1$ решите неравенство:

а) $|x - 1| < 2a - 1$;   б) $|x - 1| > 2a - 1$.

8. При каких значениях параметра x система $\begin{cases}2a + 3 < x - 1, \\ a - 1 > x + 3\end{cases}$ не имеет решений?

Вариант 3

1. Среди чисел $-3; -2; 1$ найдите решения системы неравенств

$$\begin{cases}13 - (5 - 7x) \leqslant x - (4x - 3), \\ |2x + 1| < 4.\end{cases}$$

2. Решите двойное неравенство $-3{,}9 < 2{,}1 - 1{,}5x < 2{,}7$.

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{-0{,}3 - x}$;   б) $\sqrt{2x - 3} + \dfrac{2x + 1}{\sqrt{5 - 4x}}$?

4. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}5x - 4 > x + 2, \\ \dfrac{x - 1}{3} < \dfrac{3 - x}{7};\end{cases}$ б) $\begin{cases}1 + 2y \geqslant 7 - y, \\ \dfrac{y}{5} - 1 < 0, \\ |4 - y| < 3.\end{cases}$

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $2x - a \geqslant 3 - ax$.

6. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}2x < x - 1, \\ |x - 3| \leqslant 4;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x - 1}{4} - \dfrac{x}{3} > 1, \\ (x + 4)(x - 5) \leqslant x^2.\end{array}\right.$

7. При $a = -2; 1$ решите неравенство:

а) $|2x - 1| < 1 - 2a$;   б) $|2x - 1| \geqslant 1 - 2a$.

8. При каких значениях параметра x система $\begin{cases}3a + 1 > x - 2, \\ a - 2 < x + 1\end{cases}$ не имеет решений?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 21

Степень с целым показателем и ее свойства

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$, $n \in \mathbf{Z}$.

В частности, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^0 = 1$ при $a \neq 0$ и $a^1 = a$ при любых значениях a.

СВОЙСТВА

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Подготовительный вариант

1. Представьте в виде степени с отрицательным показателем:

   а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{(x+1)^2}$.

2. Представьте в виде дроби выражение:

   а) 2^{-3}; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; в) $2(ab)^{-2}$; г) $2ab^{-2}$.

3. Найдите значение выражения:

   а) $(-2{,}5)^{-2} + \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; б) $\frac{5^{-3} \cdot 25^2}{5^{-1}}$; в) $\left(3\frac{17}{19}\right)^3 \cdot \left(\frac{74}{19}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{17}{19}\right)^0$.

4. Упростите выражение:

   а) $(a^2)^{-4} \cdot (a^{-3})^{-3} : a^{-2}$; б) $\left(-\frac{3}{4}a^{-3}b^2\right)^{-3} \cdot \frac{b^4}{(-2)^2 a^6}$.

5. Упростите выражение $\frac{12^{n+1}}{3^n \cdot 2^{2n+1}}$.

6. Найдите значение выражения

   $(a^{-1} - b^{-1})(a^{-3} + a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2} + b^{-3})$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

7. При каком значении переменной x верно равенство

   $\frac{4^{2x-1} \cdot 3^{3x}}{12^{3x}} = 1$?

Вариант 1

1. Представьте в виде степени с отрицательным показателем:

   а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{(x-3)^3}$.

2. Представьте в виде дроби выражение:

а) 5^{-2}; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; в) $-2xy^{-3}$; г) $-2(xy)^{-3}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $(-1{,}5)^{-3} + \left(1\frac{1}{9}\right)^{2}$; б) $\frac{4^{-3} \cdot 4^{-5}}{2^{-20}}$; в) $\left(5\frac{1}{3}\right)^{5} \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{17}{19}\right)^{0}$.

4. Упростите выражение:

а) $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-7})^{-1} : a^{-3}$; б) $\left(-\frac{2}{3}a^{-2}b^{3}\right)^{-2} \cdot \frac{8b^4}{a^2}$.

5. Упростите выражение $\frac{35^n}{7^{n+1} \cdot 5^{n-1}}$.

6. Найдите значение выражения $(a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2})$ при $a = 2,\ b = \frac{1}{2}$.

7. При каком значении переменной x верно равенство $\frac{3^{x-1} \cdot 2^{2x}}{6^{2x}} = 1$?

Вариант 2

1. Представьте в виде степени с отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{(x-2)^2}$.

2. Представьте в виде дроби выражение:

а) 3^{-3}; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; в) $-3bc^{-2}$; г) $-3(bc)^{-2}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $(-1{,}5)^3 + (0{,}8)^{-2}$; б) $\frac{3^{-2} \cdot 9^{-2}}{3^{-9}}$; в) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{5} \cdot \left(\frac{15}{7}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{13}{17}\right)^{0}$.

4. Упростите выражение:

а) $(a^{-2})^{-4} \cdot (a^3)^{-2} : a^{-2}$; б) $\left(-\frac{5}{3}a^{3}b^{-2}\right)^{-3} \cdot \frac{125a^4}{b}$.

5. Упростите выражение $\frac{6^{n+1} \cdot 7^{n-1}}{42^n}$.

6. Найдите значение выражения $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2})$ при $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{2}$.

7. При каком значении переменной x верно равенство

$\frac{3^{2x-1} \cdot 2^{x}}{6^{x}} = 1$?

Вариант 3

1. Представьте в виде степени с отрицательным показателем:

а) 4; б) $\frac{1}{(2x-1)^3}$.

2. Представьте в виде дроби выражение:

а) $(-3)^{-4}$; б) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$; в) $-3(x^{-1}y)^{-3}$; г) $-3x^{-1}y^{-3}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $(-1{,}5)^{-3}+\left(-\frac{5}{9}\right)^2$; б) $\frac{2^{-7}\cdot 4^{-5}}{8^{-7}}$; в) $\left(2\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-5}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)^0$.

4. Упростите выражение:

а) $(a^{-3})^4\cdot(a^{-7})^{-2}:a^{-2}$; б) $(-0{,}4ab^{-2})^{-2}\cdot(0{,}8ab^{-2})^2$.

5. Упростите выражение $\frac{6^n}{3^{n+1}\cdot 0{,}5^{1-n}}$.

6. Найдите значение выражения $(a^{-1}+b^{-1})(a^{-3}-a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}-b^{-3})$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{5}$.

7. При каком значении переменной x верно равенство

$\frac{2^{x+2}\cdot 3^{2x}}{6^{2x}}=1$?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 22

Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями. Стандартный вид числа

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

При упрощении выражений, содержащих степени с отрицательным показателем, обычно степени с отрицательным показателем заменяют дробями, после чего проводят упрощения. В некоторых случаях целесообразно либо воспользоваться заменой переменных, либо умножить числитель и знаменатель дроби на степень с положительным показателем. Например, выражение $\frac{a^{-2}+a}{a^{-3}}$ можно умножить на a^3. Тогда получим $\frac{(a^{-2}+a)\cdot a^3}{a^{-3}\cdot a^3}=\frac{a^{-2}\cdot a^3+a\cdot a^3}{a^0}=a+a^4$. Заметим, что равенство $\frac{a^{-2}+a}{a^{-3}}=a+a^4$ верно при $a\neq 0$.

О п р е д е л е н и е. Стандартным видом числа x называется запись этого числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n \in \boldsymbol{Z}$. Число a называется значащей частью числа x, а целое число n называется порядком числа x.

Подготовительный вариант

1. Представьте в стандартном виде число:

   а) 4 950 000; б) 0,000493; в) 427.

2. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

   а) $(1{,}25 \cdot 10^{11}) \cdot (6{,}25 \cdot 10^{-7})$;

   б) $(1{,}25 \cdot 10^{11}) : (6{,}25 \cdot 10^{-7})$.

3. Упростите выражение $(b^{-2} + a^{-2}) : \left(\dfrac{ab}{a^2 + b^2}\right)^{-1}$.

4. Порядок числа a равен 11, порядок числа b равен -5. Чему может быть равен порядок числа:

   а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{b}{a}$?

5. Докажите тождество $\dfrac{(ab^{-1} + a^{-1}b + 1) \cdot (a^{-1} - b^{-1})^2}{a^2b^{-2} + a^{-2}b^2 - (ab^{-1} + a^{-1}b)} = \dfrac{a - b}{ab(a + b)}$.

6. Найдите все значения переменной, при которых выражение $\left(\dfrac{n^3 - 64}{n^3 - 8n^2 + 16n} + 4(n - 4)^{-1}\right) \cdot (n + 4)^{-2}$ принимает значение $5^{-3} \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$.

Вариант 1

1. Представьте в стандартном виде число:

   а) 240 000; б) 0,00043; в) 214.

2. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

   а) $(2{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-5})$; б) $(2{,}5 \cdot 10^{12}) : (3{,}2 \cdot 10^{-5})$.

3. Упростите выражение $(b^{-2} - a^{-2}) \cdot \left(\dfrac{a + b}{ab}\right)^{-1}$.

4. Порядок числа a равен 14, порядок числа b равен 5. Чему может быть равен порядок числа:

   а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{b}{a}$?

5. Докажите тождество $\dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{(x + y)^2} + \dfrac{2x^{-1} + 2y^{-1}}{(x + y)^3} = \dfrac{1}{x^2y^2}$.

6. Найдите все значения переменной, при которых выражение $\left(\dfrac{8m^3-2m}{1+8m^3}+(4m^2-2m+1)^{-1}\right):(2m-1)^{-2}$ принимает значение $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$.

Вариант 2

1. Представьте в стандартном виде число:
а) 4 300 000; б) 0,0036; в) 145.

2. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:
а) $(5{,}2\cdot10^8)\cdot(1{,}6\cdot10^{-6})$; б) $(5{,}2\cdot10^8):(1{,}6\cdot10^{-6})$.

3. Упростите выражение $(a^{-2}-b^{-2})\cdot\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)^{-1}$.

4. Порядок числа a равен 8, порядок числа b равен 11. Чему может быть равен порядок числа:
а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{b}{a}$?

5. Докажите тождество $\dfrac{(a^{-1}-a^{-1}b^{-1}+b^{-1})(a+b+1)}{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}-a^{-2}b^{-2}}=ab$.

6. Найдите все значения переменной, при которых выражение $\left(\dfrac{2m-8m^3}{1-8m^3}+(4m^2+2m+1)^{-1}\right):(3m-1)^{-2}$ принимает значение $\left(\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-2}$.

Вариант 3

1. Представьте в стандартном виде число:
а) 24; б) 0,000037; в) 4 150 000.

2. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:
а) $(1{,}5\cdot10^{13})\cdot(1{,}2\cdot10^{-7})$; б) $(1{,}5\cdot10^{13}):(1{,}2\cdot10^{-7})$.

3. Упростите выражение $\left((a^{-2}-b^{-2})\cdot\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}\right)^{-1}$.

4. Порядок числа a равен 17, порядок числа b равен 12. Чему может быть равен порядок числа:
а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{b}{a}$?

5. Докажите тождество $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{(x+y)^2}+(2x^{-1}+2y^{-1})\cdot(x+y)^{-3}=(xy)^{-2}$.

6. Найдите все значения переменной, при которых выражение $\left(\frac{x^3 - x}{x^3 + 1} + (x^2 - x + 1)^{-1}\right) \cdot (|x| - 1)^{-1}$ принимает значение $(-2)^{-2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 23

Преобразования графиков функций

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. *Функцией* называется соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y. Запись: $y = f(x)$, где x — независимая переменная, *аргумент*, y — зависимая переменная, *функция* от x, $f(x)$ — выражение, задающее функцию.

Множество значений аргумента называется *областью определения функции* (обозначение $D(f)$), множество всех значений, которые принимает функция, — *областью значений функции* (обозначение $E(f)$). Значения аргумента, при которых функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называются *нулями функции*. Промежутки, в которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения, называют *промежутками знакопостоянства*.

ОСНОВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

График функции $y = k \cdot f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ при $k > 1$ растяжением от оси Ox в k раз и при $0 < k < 1$ сжатием к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.

График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Ox.

График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|n|$ единиц вверх, если $n > 0$, или вниз, если $n < 0$.

График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|m|$ единиц вправо, если $m > 0$, или влево, если $m < 0$.

Подготовительный вариант

1. Дана функция $f(x) = 2 - x + x^3$. Задайте формулой функцию:
а) $y = 2 \cdot f(x)$; в) $y = -f(x)$;
б) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x - 1)$.

2. Ломаная $ABCD$ — график функции $y = f(x)$, где $A(4; -3)$, $B(2; 2)$, $C(-2; 0)$, $D(-3; -2)$. В одной системе координат постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$, укажите $D(h)$ и $E(h)$, если:

   а) $h(x) = 2 \cdot f(x)$; б) $h(x) = 2 + f(x)$; в) $h(x) = f(x - 2)$.

3. Используя график функции $f(x) = x^2$, постройте график функции:

   а) $y = \frac{1}{2}x^2$; в) $y = (x + 2)^2$.

   б) $y = x^2 - 4$;

   Укажите в каждом случае нули функции.

4. Постройте график функции $y = 2 - |3 - x|$ и укажите:
   а) нули функции;
   б) область определения функции;
   в) область значений функции;
   г) промежутки знакопостоянства функции.

5. Решите уравнение $f(2x - 1) = f(x - 1) + 4$, если $f(x) = 3 - 4x$.

6. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$. По графику определите количество корней уравнения:

   а) $f(x) = -5$; б) $f(x) = -4$; в) $f(x) = 1$.

7. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, если известно, что

   $$f(x) - 2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + \frac{1}{x}.$$

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2x - 1$. Задайте формулой функцию:

   а) $y = 2 \cdot f(x)$; в) $y = -f(x)$;

   б) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x + 1)$.

2. Ломаная $ABCD$ — график функции $y = f(x)$, где $A(-3; -2)$, $B(0; -1)$, $C(1; 1)$, $D(4; -2)$. В одной системе координат постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$, указав $D(h)$ и $E(h)$, если:

   а) $h(x) = 2 \cdot f(x)$; б) $h(x) = 2 + f(x)$; в) $h(x) = f(x - 2)$.

3. Используя график функции $f(x) = x^2$, постройте график функции:

   а) $y = x^2 + 2$; б) $y = (x + 2)^2$.

   Укажите в каждом случае нули функции.

4. Постройте график функции $y = |x - 2| - 1$ и укажите:
   а) нули функции;
   б) область определения функции;
   в) область значений функции;
   г) промежутки знакопостоянства функции.

5. Решите уравнение $f(x - 2) = f(x + 1)$, если $f(x) = 4 + 2x - x^2$.

6. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 1$ и по графику определите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ не имеет корней.

7. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, если известно, что $3f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4x + \dfrac{1}{x}$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = 2x + 1$. Задайте формулой функцию:
   а) $y = 2 \cdot f(x)$; в) $y = -f(x)$;
   б) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x - 2)$.

2. Ломаная $ABCD$ — график функции $y = f(x)$, где $A(-3; 2)$, $B(0; 1)$, $C(2; 2)$, $D(4; -2)$. В одной системе координат постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$, указав $D(h)$ и $E(h)$, если:
   а) $h(x) = 2 \cdot f(x)$; б) $h(x) = 2 + f(x)$; в) $h(x) = f(x - 2)$.

3. Используя график функции $f(x) = x^2$, постройте график функции:
   а) $y = x^2 + 1$; б) $y = (x + 1)^2$.
   Укажите в каждом случае нули функции.

4. Постройте график функции $y = |x + 1| - 2$ и укажите:
   а) нули функции;
   б) область определения функции;
   в) область значений функции;
   г) промежутки знакопостоянства функции.

5. Решите уравнение $f(x + 2) = f(x - 1)$, если $f(x) = x^2 - x + 5$.

6. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 4x + 2$ и по графику определите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ не имеет корней.

7. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, если известно, что $2f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4x + \dfrac{1}{x}$.

Вариант 3

1. Дана функция $f(x) = 2 - x^2$. Задайте формулой функцию:

   а) $y = 2 \cdot f(x)$; в) $y = -f(x)$;

   б) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x + 1)$.

2. Ломаная $ABCD$ — график функции $y = f(x)$, где $A(-4;\ 2)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 0)$, $D(3;\ 4)$. В одной системе координат постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$, указав $D(h)$ и $E(h)$, если:

   а) $h(x) = -f(x)$; б) $h(x) = f(x) - 2$; в) $h(x) = f(x + 1)$.

3. Используя график функции $f(x) = x^2$, постройте график функции:

   а) $y = 4 - x^2$; б) $y = -(x + 1)^2$.

   Укажите в каждом случае нули функции.

4. Постройте график функции $y = 2 + |3 - x|$ и укажите:

   а) нули функции;

   б) область определения функции;

   в) область значений функции;

   г) промежутки знакопостоянства функции.

5. Решите уравнение $f(x - 2) = f(x + 1)$, если $f(x) = x^2 + 3x - 7$.

6. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 3x + 1$ и по графику определите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ не имеет корней.

7. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, если известно, что $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 24

Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$. Дробно-линейная функция

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

ФУНКЦИЯ $y = x^{-1}$

1. Область определения функции — множество всех чисел, отличных от нуля, т. е. $x \neq 0$. Следовательно, график функции не пересекает ось ординат.

2. При $x > 0$ функция принимает положительные значения, т. е. $y > 0$, при $x < 0$ функция принимает отрицательные значения, т. е. $y < 0$. График функции проходит в первой и третьей координатных четвертях (рис. 2).

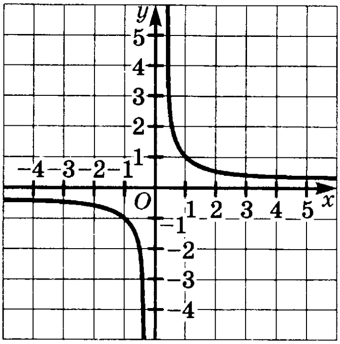


Рис. 2

3. Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции, т. е. точке $\left(a;\ \frac{1}{a}\right)$ соответствует точка $\left(-a;\ -\frac{1}{a}\right)$. Из этого следует, что график функции симметричен относительно начала координат.
4. Если $x \to +\infty$, то $y \to 0+$, т. е. при безграничном увеличении аргумента значения функции становятся бесконечно малыми положительными числами. Аналогично, если $x \to -\infty$, то $y \to 0-$, т. е. значения функции стремятся к нулю слева (со стороны отрицательных чисел). Из этого следует, что ось абсцисс является *горизонтальной асимптотой* графика функции.
5. Если $x \to 0+$, то $y \to +\infty$, если $x \to 0-$, то $y \to -\infty$, т. е. ось ординат является *вертикальной асимптотой* графика функции.

ФУНКЦИЯ $y = x^{-2}$

1. Область определения функции — множество всех чисел, отличных от нуля, т. е. $x \neq 0$. Следовательно, график функции не пересекает ось ординат.
2. При любых значениях аргумента, т. е. при $x \neq 0$, функция принимает положительные значения, т. е. $y > 0$. Следовательно, график функции проходит в первой и второй координатных четвертях (рис. 3).

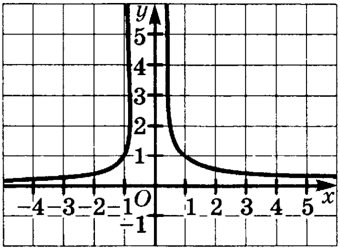


Рис. 3

3. Противоположным значениям аргумента соответствуют одинаковые значения функции, т. е. точке $\left(a;\ \frac{1}{a^2}\right)$ соответствует точка $\left(-a;\ \frac{1}{a^2}\right)$. Из этого следует, что график функции симметричен относительно оси ординат.

4. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0+$, т. е. при безграничном увеличении или уменьшении аргумента значения функции становятся бесконечно малыми положительными числами. Из этого следует, что ось абсцисс является *горизонтальной асимптотой* графика функции.
5. Если $x \to 0+$ или $x \to 0-$, то $y \to +\infty$, т. е. ось ординат является *вертикальной асимптотой* графика функции.

Определение. Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число, называется *обратной пропорциональностью*. Ее свойства совпадают со свойствами функции $y = x^{-1}$, графиком является *гипербола*. При $k > 0$ график обратной пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвертой. Ось абсцисс и ось ординат являются асимптотами графика обратной пропорциональности, начало координат — его центром симметрии. График обратной пропорциональности строят либо по точкам, либо растяжением от оси абсцисс в $|k|$ раз при $|k| > 1$ (или сжатием к оси абсцисс в $\frac{1}{|k|}$ раз при $|k| < 1$).

Определение. Функция вида $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, где x — независимая переменная, a, b, c, d — числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, называется *дробно-линейной функцией*. Если $c = 0$ или $ad - bc = 0$, то функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ будет линейной.

Дробно-линейную функцию всегда можно представить в виде $y = \frac{k}{x - m} + n$, где $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, $m = -\frac{d}{c}$ и $n = \frac{a}{c}$. Следовательно, графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из графика обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ сдвигом вдоль оси Ox на $|m|$ единиц и вдоль оси Oy на $|n|$ единиц. При этом прямые $x = m$ и $y = n$ являются асимптотами графика дробно-линейной функции, а точка их пересечения — его центром симметрии.

При построении графика дробно-линейной функции иногда вместо сдвига графика проводят сдвиг системы координат в обратном направлении. Или иначе: строят горизонтальную и вертикальную асимптоты ($y = n$ и $x = m$ соответственно) и в них, как в системе координат, строят график функции $y = \frac{k}{x}$.

Подготовительный вариант

1. Принадлежит ли точка $M(2; -1)$ графику функции:

а) $y = -\frac{2}{x}$; б) $y = \frac{2}{x} - 2$; в) $y = \frac{2x+6}{x-3}$?

2. Найдите коэффициент k, если известно, что точка $A(3; -1)$ принадлежит графику функции:

а) $y = \frac{k}{x}$; б) $y = \frac{k}{x+2}$; в) $y = \frac{k}{x} + 2$; г) $y = \frac{kx+2}{x+1}$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$. Найдите:

а) значение функции, если $x = -1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции равно -2.

4. Используя свойства функции $y = x^{-1}$, сравните числа:

а) $(0,072)^{-1}$ и $(0,702)^{-1}$; в) $(-17,7)^{-1}$ и $(-17,07)^{-1}$;

б) $(7,14)^{-1}$ и $(7,104)^{-1}$; г) $(-180,1)^{-1}$ и $(0,017)^{-1}$.

5. Используя свойства функции $y = x^{-2}$, сравните числа:

а) $(0,072)^{-2}$ и $(0,702)^{-2}$; в) $(-17,7)^{-2}$ и $(-17,07)^{-2}$;

б) $(7,14)^{-2}$ и $(7,104)^{-2}$; г) $(-180,1)^{-2}$ и $(0,017)^{-2}$.

6. Сколько точек с целочисленными координатами имеет график функции $f(x) = \frac{3x+7}{x+1}$?

7. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{4}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x-3}$; в) $y = 1 - \frac{4}{x-3}$.

8. Укажите количество корней уравнения $y = 2 - a$, если

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x-3}, & x \leqslant 2; \\ \frac{x-6}{2}, & x > 2. \end{cases}$$

Вариант 1

1. Принадлежит ли точка $M(-1; 2)$ графику функции:

а) $y = -\frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x} - 2$; в) $y = \frac{3x+1}{x+1}$?

2. Найдите коэффициент k, если известно, что точка $A(2; -1)$ принадлежит графику функции:

а) $y = \frac{k}{x}$; б) $y = \frac{k}{x+2}$; в) $y = \frac{k}{x} + 2$; г) $y = \frac{kx-2}{x-3}$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{4x + 5}{x + 2}$. Найдите:

а) значение функции, если $x = -1$;
б) значение аргумента, при котором значение функции равно 5.

4. Используя свойства функции $y = x^{-1}$, сравните числа:
а) $(0{,}014)^{-1}$ и $(0{,}104)^{-1}$; в) $(-23{,}1)^{-1}$ и $(-23{,}01)^{-1}$;
б) $(15{,}54)^{-1}$ и $(15{,}501)^{-1}$; г) $(-218{,}3)^{-1}$ и $(0{,}027)^{-1}$.

5. Используя свойства функции $y = x^{-2}$, сравните числа:
а) $(0{,}014)^{-2}$ и $(0{,}104)^{-2}$; в) $(-23{,}1)^{-2}$ и $(-23{,}01)^{-2}$;
б) $(15{,}54)^{-2}$ и $(15{,}501)^{-2}$; г) $(-218{,}3)^{-2}$ и $(0{,}027)^{-2}$.

6. Сколько точек с целочисленными координатами имеет график функции $f(x) = \frac{-2x + 4}{x + 1}$?

7. Постройте график функции:
а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = \frac{6}{x - 2}$; в) $y = \frac{6}{x - 2} - 3$.

8. Используя график функции $y = f(x)$, укажите количество корней уравнения $f(x) = 1 - a$ в зависимости от параметра a, если

$$y = \begin{cases} \frac{x + 3}{x - 1}, & x \leqslant 0; \\ \frac{x - 6}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Принадлежит ли точка $M(1; -2)$ графику функции:
а) $y = -\frac{2}{x}$; б) $y = \frac{2}{x} - 4$; в) $y = \frac{2x + 5}{x - 1}$?

2. Найдите коэффициент k, если известно, что точка $A(-2; -1)$ принадлежит графику функции:
а) $y = \frac{k}{x}$; б) $y = \frac{k}{x + 3}$; в) $y = \frac{k}{x} + 2$; г) $y = \frac{kx - 1}{x + 1}$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{3x - 10}{x - 2}$. Найдите:
а) значение функции, если $x = -2$;
б) значение аргумента, при котором значение функции равно 1.

4. Используя свойства функции $y = x^{-1}$, сравните числа:

а) $(0{,}045)^{-1}$ и $(0{,}101)^{-1}$; в) $(-35{,}1)^{-1}$ и $(-35{,}09)^{-1}$;

б) $(21{,}47)^{-1}$ и $(21{,}199)^{-1}$; г) $(-188{,}1)^{-1}$ и $(0{,}015)^{-1}$.

5. Используя свойства функции $y = x^{-2}$, сравните числа:

а) $(0{,}045)^{-2}$ и $(0{,}101)^{-2}$; в) $(-35{,}1)^{-2}$ и $(-35{,}09)^{-2}$;

б) $(21{,}47)^{-2}$ и $(21{,}199)^{-2}$; г) $(-188{,}1)^{-2}$ и $(0{,}015)^{-2}$.

6. Сколько точек с целочисленными координатами имеет график функции $f(x) = \frac{-3x - 1}{x - 1}$?

7. Постройте график функции:

а) $y = \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{4}{x + 1}$; в) $y = 3 + \frac{4}{x + 1}$.

8. Используя график функции $y = f(x)$, укажите количество корней уравнения $f(x) = 1 - a$ в зависимости от параметра a, если

$$y = \begin{cases} \frac{x - 2}{x}, & x \geqslant 1; \\ \frac{-x - 1}{2}, & x < 1. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Принадлежит ли точка $M(-2;\ 1{,}5)$ графику функции:

а) $y = -\frac{3}{x}$; б) $y = \frac{1}{2} - \frac{2}{x}$; в) $y = \frac{3x + 1}{x + 2}$?

2. Найдите коэффициент k, если известно, что точка $A(2;\ 7)$ принадлежит графику функции:

а) $y = \frac{k}{x}$; б) $y = \frac{k}{x + 2}$; в) $y = \frac{k}{x} + 2$; г) $y = \frac{kx - 2}{x - 3}$.

3. Дана функция $f(x) = \frac{3 - 2x}{x + 2}$. Найдите:

а) значение функции, если $x = -1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции равно -1.

4. Используя свойства функции $y = x^{-1}$, сравните числа:

а) $(0{,}049)^{-1}$ и $(0{,}401)^{-1}$; в) $(-32{,}1)^{-1}$ и $(-30{,}01)^{-1}$;

б) $(14{,}59)^{-1}$ и $(14{,}501)^{-1}$; г) $(-8{,}03)^{-1}$ и $(0{,}011)^{-1}$.

5. Используя свойства функции $y = x^{-2}$, сравните числа:

а) $(0{,}049)^{-2}$ и $(0{,}401)^{-2}$;
б) $(14{,}59)^{-2}$ и $(14{,}501)^{-2}$;
в) $(-32{,}1)^{-2}$ и $(-30{,}01)^{-2}$;
г) $(-8{,}03)^{-2}$ и $(0{,}011)^{-2}$.

6. Сколько точек с целочисленными координатами имеет график функции $f(x) = \dfrac{5x + 9}{x + 2}$?

7. Постройте график функции:

а) $y = -\dfrac{8}{x}$; б) $y = -\dfrac{8}{x + 2}$; в) $y = 2 - \dfrac{8}{x - 1}$.

8. Используя график функции $y = f(x)$, укажите количество корней уравнения $f(x) = 1 - 2a$ в зависимости от параметра a, если

$$y = \begin{cases} \dfrac{2x - 4}{x - 1}, & x \leqslant 0; \\ (x - 2)^2, & x > 0. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Глава 1. **Дроби**

Подготовительный вариант

1. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{3a}{3a-b}-\dfrac{a}{3a+b}-\dfrac{2ab}{9a^2-b^2}$; б) $\dfrac{9-6x}{x^3-27}+\dfrac{3-x}{x^2+3x+9}$.

2. Выполните действия: $\dfrac{y^2-8y+16}{y^2-4y+16}:\dfrac{5y-20}{y^3+64}-\dfrac{y^2-20}{5}$.

3. Найдите x и y, при которых выполняется равенство

$$\frac{4}{(a-1)(a-5)}=\frac{x}{a-1}+\frac{y}{a-5}.$$

4. Сократите дробь $\dfrac{a^4-a^3+a^2-a+1}{a^5+1}$.

5. Упростите выражение $\left(2b-\dfrac{24b}{2b+3}+3\right)\cdot\left(2b+\dfrac{24b}{2b-3}-3\right)+10$.

6. Укажите все точки графика функции $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-2}$, имеющие целочисленные координаты.

7. Докажите тождество $\dfrac{\dfrac{1}{x-2y}-\dfrac{1}{x+2y}}{\dfrac{1}{x-2y}+\dfrac{1}{x+2y}}-\dfrac{x+2y}{x}=-1$.

Вариант 1

1. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{5a}{a-2b}-\dfrac{a}{a+2b}-\dfrac{4ab}{a^2-4b^2}$; б) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+4}-\dfrac{5x-2}{x^3+8}$.

2. Выполните действия: $\dfrac{7y+35}{y^3-125}\cdot\dfrac{y^2+5y+25}{y^2+10y+25}-\dfrac{2}{y^2-25}$.

3. Найдите x и y, при которых выполняется равенство

$$\frac{3a-2}{(a+2)(a-6)}=\frac{x}{a+2}+\frac{y}{a-6}.$$

4. Сократите дробь $\dfrac{x^5-32}{x^4+2x^3+4x^2+8x+16}$.

5. Упростите выражение

$$\left(3b + \frac{60b}{3b-5} - 5\right) : \left(1 + \frac{9b^2 - 33b + 20}{30b - 9b^2 - 25}\right) + 24.$$

6. Найдите все точки графика функции $y = \frac{x^2 - x - 24}{x - 5}$, имеющие целочисленные координаты.

7. Докажите тождество $\dfrac{\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{x-3y}}{\frac{1}{x+3y} - \frac{1}{x-3y}} + \dfrac{x+3y}{3y} = 1.$

Вариант 2

1. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{1}{2x-y} - \frac{1}{2x+y} + \frac{4x}{4x^2-y^2}$; б) $\frac{12b}{b^3+64} - \frac{b+4}{b^2-4b+16}$.

2. Выполните действия: $\frac{c^2 - 10c + 25}{c^2 + 3c + 9} : \frac{6c^2 - 30c}{c^3 - 27} - \frac{c-2}{6}$.

3. Найдите x и y, при которых выполняется равенство

$$\frac{6}{(a-1)(a-7)} = \frac{x}{a-1} + \frac{y}{a-7}.$$

4. Сократите дробь $\frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16}{x^5 + 32}$.

5. Упростите выражение $\left(2a + \frac{2ab}{2a+b} - b\right) : \left(1 + \frac{2ab}{4a^2 - b^2}\right) - a + 2b.$

6. Найдите все точки графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 20}{x - 4}$, имеющие целочисленные координаты.

7. Докажите тождество $\dfrac{\frac{1}{a-2b} - \frac{1}{a+2b}}{\frac{1}{a-2b} + \frac{1}{a+2b}} - \dfrac{a+2b}{a} = -1.$

Вариант 3

1. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{4b}{a^2 - 2ab} + \frac{a}{2b^2 - ab} + \frac{2}{b}$; б) $\frac{1}{x-3} - \frac{9x}{x^3 - 27}$.

2. Выполните действия: $\frac{b}{b^2 - 9} - \frac{b^2 - 3b + 9}{b^2 - 9} : \frac{b^3 + 27}{3b + 9}$.

3. Найдите x и y, при которых выполняется равенство

$$\frac{5a+1}{(a+2)(a-1)} = \frac{x}{a+2} + \frac{y}{a-1}.$$

4. Сократите дробь $\dfrac{x^7 - 1}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$.

5. Упростите выражение

$$\left(2x + \frac{40x}{2x - 5} - 5\right) : \left(1 - \frac{4x^2 - 22x + 20}{4x^2 - 20x + 25}\right) + 16.$$

6. Найдите все точки графика функции $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}$, имеющие целочисленные координаты.

7. Докажите тождество $\dfrac{\dfrac{1}{x + y} + \dfrac{1}{x - y}}{\dfrac{1}{x + y} - \dfrac{1}{x - y}} + \dfrac{x + y}{y} = 1$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Глава 2. **Целые числа. Делимость чисел**

Подготовительный вариант

1. Найдите все значения $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, если:

   а) $\overline{765a8} \,\vdots\, 4$; б) $\overline{1378a} \,\vdots\, 6$; в) $\overline{42a739} \,\vdots\, 11$.

2. Остаток от деления числа a на 17 равен 4. Найдите остаток от деления на 17 числа $7a - a^2$. Проверьте результат при:
   а) $a = 4$; б) $a = 21$.

3. Найдите все значения $n \in N$, при которых значение функции $f(n) = \dfrac{n^3 - 5n + 9}{n + 1}$ является натуральным числом.

4. Докажите, что число $k^2 + 5k + 6$ является составным при любом $k \in N$.

5. Остаток от деления числа a на 5 равен 4, а от деления на 7 равен 1. Чему равен остаток от деления числа a на 35?

6. Найдите количество различных натуральных делителей числа $10^3 \cdot 11^4 \cdot 12^5$.

7. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

8. Найдите такое число $n \in N$, что $(357!) \,\vdots\, 17^n$, но $(357!) \not\vdots\, 17^{n+1}$.

Вариант 1

1. Найдите все значения $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, если:

   а) $\overline{261a6} \vdots 4$; б) $\overline{2314a} \vdots 6$; в) $\overline{24a139} \vdots 11$.

2. Остаток от деления числа a на 13 равен 2. Найдите остаток от деления на 13 числа $8a - a^2$. Проверьте результат при:
   а) $a = 2$; б) $a = 15$.

3. Найдите все значения $n \in N$, при которых значение функции

   $f(n) = \dfrac{n^3 - 2n^2 + 3n + 5}{n - 1}$ является:

   а) целым числом; б) натуральным числом.

4. Докажите, что число $k^2 + 7k + 12$ является составным при любом $k \in N$.

5. Остаток от деления числа a на 3 равен 1, а от деления на 7 равен 5. Чему равен остаток от деления числа a на 21?

6. Найдите количество различных натуральных делителей числа $6^4 \cdot 7^3 \cdot 8^2$.

7. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 - 4y^2 = 5$.

8. Найдите такое число $n \in N$, что $(171!) \vdots 13^n$, но $(171!) \not\vdots\ 13^{n+1}$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n)$.

Вариант 2

1. Найдите все значения $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, если:

   а) $\overline{325a2} \vdots 4$; б) $\overline{4231a} \vdots 6$; в) $\overline{76a251} \vdots 11$.

2. Остаток от деления числа a на 11 равен 3. Найдите остаток от деления на 11 числа $8a - a^2$. Проверьте результат при:
   а) $a = 3$; б) $a = 14$.

3. Найдите все значения $n \in N$, при которых значение функции

   $f(n) = \dfrac{n^3 - n^2 - 4n + 9}{n - 2}$ является:

   а) целым числом; б) натуральным числом.

4. Докажите, что число $k^2 + 3k + 2$ является составным при любом $k \in N$.

5. Остаток от деления числа a на 3 равен 2, а от деления на 7 равен 3. Чему равен остаток от деления числа a на 21?

6. Найдите количество различных натуральных делителей числа $7^4 \cdot 8^3 \cdot 9^2$.

7. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $4x^2 - y^2 = 3$.

8. Найдите такое число $n \in N$, что $(125!) \vdots 11^n$, но $(125!) \not\vdots\, 11^{n+1}$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n)$.

Вариант 3

1. Найдите все значения $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, если:

   а) $\overline{2119a8} \vdots 4$; б) $\overline{5319a} \vdots 6$; в) $\overline{54a109} \vdots 11$.

2. Остаток от деления числа a на 3 равен 2. Найдите остаток от деления на 3 числа $8a - a^2$. Проверьте результат при:
   а) $a = 2$; б) $a = 17$.

3. Найдите все значения $n \in N$, при которых значение функции $f(n) = \dfrac{n^3 - 3n + 4}{n - 1}$ является:

   а) целым числом; б) натуральным числом.

4. Докажите, что число $k^2 + 6k + 8$ является составным при любом $k \in N$.

5. Остаток от деления числа a на 3 равен 1, а от деления на 7 равен 6. Чему равен остаток от деления числа a на 21?

6. Найдите количество различных натуральных делителей числа $4^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2 \cdot 7$.

7. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $9x^2 - 4y^2 = 5$.

8. Найдите такое число $n \in N$, что $(171!) \vdots 11^n$, но $(171!) \not\vdots\, 11^{n+1}$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Глава 3. Действительные числа. Квадратные корни

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение:

   а) $\sqrt{3 - x} = \sqrt{3 + 1}$; б) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{3 - x} = 1$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{63} - 3\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}$;

б) $\left(\sqrt{5} - 2\right)^2\left(9 + 4\sqrt{5}\right) - 2\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

в) $\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2} + 1} - \left(11 - 5\sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

3. Удовлетворяет ли число $\sqrt{34 - 24\sqrt{2}} - \sqrt{34 + 24\sqrt{2}}$ неравенству $7x^2 + 58x + 13 > 0$?

4. Расположите в порядке убывания числа
$49\sqrt{3} - 7\sqrt{147}$, $5 - \sqrt{31}$, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{11}$, $\sqrt{11} + \sqrt{22}$.

5. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt{(x - 1)^2} + 2$; б) $h(x) = \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 + 2$.

6. Докажите неравенство $(ab + 6)\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right) \geqslant 24$, если $a > 0$, $b > 0$.

7. Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{144} + \sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{145} + \sqrt{146}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{168} + \sqrt{169}}.$$

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{-x} = \sqrt{9 + 16}$; б) $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{-x} = 1$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0,75} - \sqrt{108} - \frac{1}{32}\sqrt{192} + \sqrt{147}$;

б) $\left(\sqrt{7} - 3\right)^2\left(16 + 6\sqrt{7}\right) - 4\sqrt{3\frac{1}{16}}$;

в) $\frac{1 - \sqrt{21}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \frac{26}{3\sqrt{3} - 1} - \sqrt{21} - \left(\sqrt{7} - 1\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)$.

3. Удовлетворяет ли число $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$ неравенству $5x^2 + 34x + 51 < 0$?

4. Расположите в порядке возрастания числа
$18\sqrt{5} - 3\sqrt{245}$, $6 - \sqrt{41}$, $2\sqrt{19}$, $7\sqrt{11}$, $\sqrt{17} + \sqrt{29}$.

5. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt{(x + 2)^2} - 1$; б) $h(x) = \left(\sqrt{x + 2}\right)^2 - 1$.

6. Докажите неравенство $(ab + 3)\left(\frac{12}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 24$, если $a > 0$, $b > 0$.

7. Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{16} + \sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17} + \sqrt{18}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{-x} = \sqrt{25 - 16}$; б) $\sqrt{(-4)^2} - \sqrt{-x} = 5$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{80} + \sqrt{1{,}25} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180}$;

б) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2\left(7 + 4\sqrt{3}\right) + 3\sqrt{12\frac{1}{4}}$;

в) $\frac{2\sqrt{7} - 4}{1 + \sqrt{7}} + 2\sqrt{3} + 0{,}25\left(\sqrt{21} - 5\right)\left(\sqrt{7} + 3\sqrt{3}\right)$.

3. Удовлетворяет ли число $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ неравенству $11x^2 + 26x - 73 \leqslant 0$?

4. Расположите в порядке убывания числа

$9\sqrt{3} - 3\sqrt{27}$, $\sqrt{7} - 4$, $5\sqrt{3}$, $2\sqrt{19}$, $\sqrt{31} + \sqrt{30}$.

5. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt{(x - 2)^2} - 2$; б) $h(x) = \left(\sqrt{x - 2}\right)^2 - 2$.

6. Докажите неравенство

$\left(\frac{3}{ab} + 2\right)(2a + 3b) \geqslant 24$, если $a > 0$, $b > 0$.

7. Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{36} + \sqrt{37}} + \frac{1}{\sqrt{37} + \sqrt{38}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{48} + \sqrt{49}}.$$

Вариант 3

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{2 \cdot 5 - 1}$;

б) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{2x + 1} = 4$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{98} - \sqrt{4,5} - \sqrt{40,5} + \sqrt{162}$;

б) $\left(\sqrt{7} - 2\right)^2\left(11 + 4\sqrt{7}\right) - 2\sqrt{2\frac{7}{9}}$;

в) $\dfrac{7 + \sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dfrac{11}{2\sqrt{3} + 1} - \sqrt{3} + \left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 3\right)$.

3. Удовлетворяет ли число $\sqrt{19 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$ неравенству $5x^2 + 14x + 7 > 0$?

4. Расположите в порядке возрастания числа
$18\sqrt{7} - 9\sqrt{28}$, $5 - \sqrt{34}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{7} + \sqrt{11}$.

5. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt{(x - 3)^2} + 2$;

б) $h(x) = \left(\sqrt{x - 3}\right)^2 + 2$.

6. Докажите неравенство $(ab + 4)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{9}{b}\right) \geqslant 24$, если $a > 0$, $b > 0$.

7. Упростите выражение
$\dfrac{1}{\sqrt{36} + \sqrt{37}} + \dfrac{1}{\sqrt{37} + \sqrt{38}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{48} + \sqrt{49}}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Глава 4. **Квадратные уравнения**

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение:
а) $3x^2 - 4x = 0$; б) $3x^2 - 4 = 0$; в) $3x^2 + 4 = 0$.

2. Решите уравнение:
а) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ (по общей формуле);
б) $x^2 + (2 - a)x - 2a = 0$ (по общей формуле);
в) $3x^2 - 4x - 7 = 0$ (по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом).

3. Длина прямоугольника на 6 см больше его ширины. После того как длину увеличили на 9 см, а ширину — на 12 см, площадь прямоугольника увеличилась в 3 раза. Найдите периметр прямоугольника с первоначальными размерами.

4. Один из корней уравнения $9x^2 + 3x + q = 0$ на 1 меньше другого. Найдите q.

5. Упростите выражение $\dfrac{9a^2 - 9a + 2}{1 - 3a + b - 3ab}$ и найдите его значение при $a = -6$, $b = \dfrac{2}{3}$.

6. Между какими целыми числами находится каждый корень уравнения $\dfrac{2x - 1}{4x^2 - 9} - \dfrac{3}{2x + 3} + \dfrac{1}{8} = 0$?

7. Мастер и ученик, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч 40 мин. Если сначала будет работать только мастер и выполнит половину задания, а затем его сменит ученик и выполнит оставшуюся часть задания, то задание будет выполнено за 15 ч. За сколько часов может выполнить задание мастер и за сколько ученик, работая отдельно?

Вариант 1

1. Найдите множество корней уравнения:
   а) $3x^2 + x = 0$; б) $2x^2 - 9 = 0$; в) $2x^2 + 9 = 0$.

2. Решите уравнение:
   а) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (по общей формуле);
   б) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$ (по общей формуле);
   в) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ (по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом).

3. Длина прямоугольника втрое больше его ширины. После того как длину прямоугольника увеличили на 5 см, а ширину — на 10 см, его площадь увеличилась в 4 раза. Найдите периметр первоначального прямоугольника.

4. При каком значении q уравнение $5x^2 - 14x + q = 0$ имеет корни, один из которых в 2,5 раза больше другого?

5. Упростите выражение $\dfrac{8a^2 + 2a - 1}{1 - 4ax + x - 4a}$ и найдите его значение при $a = -3$, $x = \dfrac{2}{3}$.

6. Между какими целыми числами находится каждый корень уравнения $\dfrac{2}{2x + 5} - \dfrac{2x + 1}{4x^2 - 25} + \dfrac{1}{6} = 0$?

7. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 80 км, отправился велосипедист. Одновременно навстречу ему из пункта B отправился мотоциклист. Велосипедист прибыл в

пункт B через 3 ч после их встречи, а мотоциклист прибыл в пункт A через 1 ч 20 мин после встречи. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча?

Вариант 2

1. Найдите множество корней уравнения:
   а) $2x^2 + x = 0$; б) $4x^2 - 7 = 0$; в) $4x^2 + 7 = 0$.

2. Решите уравнение:
   а) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ (по общей формуле);
   б) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$ (по общей формуле);
   в) $3x^2 - 2x - 5 = 0$ (по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом).

3. Длина прямоугольника на 5 см больше стороны квадрата, а его ширина на 3 см больше стороны квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь в 1,6 раза больше площади квадрата.

4. При каком значении q уравнение $2x^2 - 15x + q = 0$ имеет корни, один из которых в 1,5 раза меньше другого?

5. Упростите выражение $\dfrac{18c^2 + 3c - 1}{1 - 6c - 6cy + y}$ и найдите его значение при $c = -6$, $y = \dfrac{5}{12}$.

6. Между какими целыми числами находится каждый корень уравнения $\dfrac{2}{9x^2 - 4} - \dfrac{1}{9x^2 - 6x} + \dfrac{3x - 4}{9x^2 + 6x} = 0$?

7. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. При встрече оказалось, что первый проехал на 6 км меньше второго. Продолжая движение, первый велосипедист прибыл в пункт B через 2 ч 24 мин после встречи, а второй прибыл в пункт A через 1 ч 40 мин после встречи. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча?

Вариант 3

1. Найдите множество корней уравнения:
   а) $7x^2 + 9x = 0$; б) $7x^2 - 9 = 0$; в) $7x^2 + 9 = 0$.

2. Решите уравнение:
   а) $4x^2 + 11x - 3 = 0$ (по общей формуле);
   б) $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$ (по общей формуле);
   в) $7x^2 - 4x - 11 = 0$ (по формуле корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом).

3. Периметр прямоугольника равен 98 см, а его диагональ — 41 см. Найдите площадь прямоугольника.

4. При каком значении q уравнение $4x^2 + 8x + q = 0$ имеет корни, один из которых на 3 больше другого?

5. Упростите выражение $\dfrac{8a^2 + 2a - 1}{1 - 4ax + x - 4a}$ и найдите его значение при $a = -3,\ x = \dfrac{2}{3}$.

6. Между какими целыми числами находится каждый корень уравнения $\dfrac{x}{6x + 2} + \dfrac{x + 2}{1 - 3x} - \dfrac{8x^2 + 3}{1 - 9x^2} = 0$?

7. Две машинистки, работая совместно, могут перепечатать рукопись за 4 дня. Если бы одна из них перепечатала половину рукописи, а затем вторая перепечатала бы оставшуюся часть, то вся работа была бы закончена за 9 дней. За какое время каждая машинистка, работая отдельно, может перепечатать рукопись?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Глава 5. **Неравенства**

Подготовительный вариант

1. Решите неравенство:
а) $2x - 1 > x + 1$; б) $2x - 3 \leqslant 3x + 2$; в) $2x - 1 > 2x + 3$.

2. При каких значениях переменной x график функции $f(x) = -3x^2 + 2x + 13$ расположен не ниже, чем график функции $g(x) = (3x + 5)(1 - x)$?

3. Решите систему неравенств:
а) $\begin{cases} 2x - 4 > 1 - 3x, \\ 2x - 4 > 3x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4 > 1 - 3x, \\ 2x + 4 > 3x - 2. \end{cases}$

4. Решите неравенство:
а) $|3 - 2x| \leqslant 1$; в) $|3 - 2x| \geqslant 3$;
б) $|3 - 2x| \leqslant 0$; г) $|29 - 31x| \geqslant -113$.

5. Укажите на координатной плоскости все точки, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-2 \leqslant x \leqslant 3$, ординаты — неравенству $|y + 1| \leqslant 2$.

6. При каких значениях параметра b корень уравнения $2x + b - 1 = 0$ меньше, чем корень уравнения $2x - b - 5 = 3b - x + 4$?

7. Найдите все значения x, удовлетворяющие условиям
$$\begin{cases} -3 < 2x - 1 < 7, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

8. Решите уравнение $|2 - |3 - x|| = |3 - x| - 2$.

Вариант 1

1. Решите неравенство:
а) $2x + 3 > x + 1$; б) $2x - 1 \leqslant 5x + 1$; в) $3 - 2x > -2x$.

2. При каких значениях переменной x график функции $f(x) = 2x^2 - 3x - 11$ расположен не ниже, чем график функции $g(x) = (3 - 2x)(1 - x)$?

3. Решите систему неравенств:
а) $\begin{cases} 3x + 2 > 1 - x, \\ 3x - 1 > 4x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2 > 1 - x, \\ 3x + 4 > 4x - 1. \end{cases}$

4. Решите неравенство:
а) $|4 - x| \leqslant 3$; в) $|4 - x| \geqslant 5$;
б) $|4 - x| \leqslant 0$; г) $|4 - x| \geqslant -3$.

5. Укажите на координатной плоскости все точки, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-3 \leqslant x \leqslant 2$, ординаты — неравенству $|y - 1| \leqslant 2$.

6. При каких значениях параметра b корень уравнения $2x - b = 7$ больше, чем корень уравнения $3x + 5b = 11$?

7. Найдите все значения x, удовлетворяющие условиям
$$\begin{cases} -3x > -12 + x, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x \geqslant 1, \end{array}\right. \\ 2x + 1 > -x - 10. \end{cases}$$

8. Решите уравнение $||2x - 3| - 1| = 1 - |3 - 2x|$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:
а) $2x + 1 > x + 3$; б) $2x + 3 \leqslant 4x - 2$; в) $7 - 3x > -3x$.

2. При каких значениях переменной x график функции $f(x) = -4x^2 - 3x + 22$ расположен не выше, чем график функции $g(x) = (3 + 4x)(2 - x)$?

3. Решите систему неравенств:
а) $\begin{cases} 2x - 4 > 1 - 3x, \\ 2x - 4 > 3x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4 > 1 - 3x, \\ 2x + 4 > 3x - 2. \end{cases}$

4. Решите неравенство:
а) $|3 - x| \leqslant 4$; в) $|3 - x| \geqslant 5$;
б) $|3 - x| \leqslant 0$; г) $|3 - x| \geqslant -2$.

5. Укажите на координатной плоскости все точки, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-3 \leqslant x \leqslant 1$, ординаты — неравенству $|y + 2| \leqslant 3$.

6. При каких значениях параметра b корень уравнения $4x + b = 3$ больше, чем корень уравнения $5x - 2b = 7$?

7. Найдите все значения x, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 4x - 5 > -2 + x, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 6, \end{array}\right. \\ -4x + 19 > -x - 5. \end{cases}$$

8. Решите уравнение $||2x - 1| - 3| = 3 - |1 - 2x|$.

Вариант 3

1. Решите неравенство:
а) $2 - 3x \geqslant 3 - x$; б) $2 - 3x \geqslant 5 - 3x$; в) $5 - x > -x - 1$.

2. При каких значениях переменной x график функции $f(x) = 3x^2 - 3x + 4$ расположен не выше, чем график функции $g(x) = (2 - 3x)(1 - x)$?

3. Решите систему неравенств:
а) $\begin{cases} 5x - 3 > 2 + x, \\ 5x + 1 > 6x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 3 > 2 + x, \\ 5x + 1 > 3x - 1. \end{cases}$

4. Решите неравенство:
а) $|1 - 2x| \leqslant 5$; в) $|1 - 2x| \geqslant 1$;
б) $|1 - 2x| \leqslant 0$; г) $|1 - 2x| \geqslant 3 - \pi$.

5. Укажите на координатной плоскости все точки, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant x \leqslant 2$, ординаты — неравенству $|y + 1| \leqslant 3$.

6. При каких значениях параметра b корень уравнения $5x - 2b = 3$ больше, чем корень уравнения $x + 2b = 1$?

7. Найдите все значения x, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 8x - 5 > 2x + 5, \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 4 \leqslant 0, \\ x - 3 \geqslant 1, \end{array}\right. \\ 2x - 3 < 3 + x. \end{cases}$$

8. Решите уравнение $||x - 3| - 3| = 3 - |3 - x|$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Глава 6. **Степень с целым показателем**

Подготовительный вариант

1. Вычислите:

а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot (-5)^0$; в) $(5^{-2} + 3^{-3}) \cdot (1 - (-3)^0)$;

б) $\frac{7^{-6} \cdot 49^{-4}}{(-7)^{-13}}$; г) $\left(\left(\ldots\left(\left((-1)^n\right)^{n-1}\right)^{n-2}\ldots\right)^{1-n}\right)^{-n}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(a^{-3})^{-2} \cdot (a^3)^{-3}}{(a^{-1})^{-2} : (a^2)^{-4}}$; б) $\frac{9^{n+1} - 9^n}{8^{n+1}} : \left(\frac{4^n}{6^{2n}}\right)^{-1}$.

3. Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем:
а) $a^{-2} - 2a^3$; б) $a^{-2} - 2a^{-3}$; в) $a^2 - 2a^{-3}$.

4. Представьте в стандартном виде число $a = 0{,}00051 \cdot 10^7$ и найдите порядок числа:
а) $a \cdot 10^{15}$; б) $0{,}0001 \cdot a$; в) $0{,}01 \cdot a^2$.

5. Плотность воздуха при $T = 0$ °C равна $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см^3. Найдите:
а) массу воздуха в пустой литровой коробке для сока;
б) объем емкости с массой воздуха 2,58 кг.

6. Упростите выражение:

а) $(y^{-1} - (x + y)^{-1}) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$; б) $\left(\left(\frac{x}{a - x}\right)^{-2} - \frac{a}{x}\left(\frac{x}{a - 2x}\right)^{-1}\right)^{-5}$.

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (-3)^0$; в) $\left(\left(5\frac{3}{7}\right)^{-1} + \left(5\frac{2}{3}\right)^{-2}\right) \cdot ((-2{,}5)^0 + (-1)^{-1})$.

б) $\frac{2^{-3} \cdot 4^2}{(-8)^{-2}}$;

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(a^3)^{-2} \cdot (a^{-7})^{-1}}{(a^{-2})^{-2} : (a^{-1})^4}$; б) $\left(-\frac{2a}{3b^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^{-2}}{4b^5}\right)^{-1}$.

3. Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем:
а) $a^{-1} - 3a^3$; б) $a^{-1} - 3a^{-3}$; в) $a - 3a^{-3}$.

4. Представьте в стандартном виде число $a = 0{,}0075 \cdot 10^{11}$ и найдите порядок числа:
а) $a \cdot 10^{12}$; б) $0{,}00001 \cdot a$; в) $0{,}001 \cdot a^2$.

5. Плотность воздуха при $T = 0$ °C равна $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см^3. Найдите массу воздуха в пустой классной комнате, если ее размеры 12, 15 и 3 м.

6. Упростите выражение:

а) $\frac{4^{n+1} - 4^n}{15^{n+1}} : \left(\frac{5^n}{12^{-n}}\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{a^{-1} - 1}{a^{-1} + 1}\right)^{-1}$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot (-4)^0$; в) $\left(\left(3\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(1\frac{2}{7}\right)^{-2}\right) \cdot ((-3{,}4)^0 - (-1)^{-2})$.

б) $\frac{3^{-3} \cdot 9^{-3}}{(-27)^{-2}}$;

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(a^{-2})^{-4} \cdot (a^3)^{-2}}{(a^{-3})^{-1} : (a^{-1})^3}$; б) $\left(\frac{3a^{-1}}{5b^2}\right)^{-2} : \left(-\frac{a}{25b^5}\right)^{-1}$.

3. Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем:
а) $a^{-1} + a^4$; б) $a^{-1} + a^{-4}$; в) $a + a^{-4}$.

4. Представьте в стандартном виде число $a = 0{,}00087 \cdot 10^{12}$ и найдите порядок числа:
а) $a \cdot 10^{14}$; б) $0{,}001 \cdot a$; в) $0{,}0001 \cdot a^2$.

5. Плотность воздуха при $T = 0$ °C равна $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Найдите массу воздуха в пустой классной комнате, если ее размеры 14, 20 и 3 м.

6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{7^{n+1} + 7^n}{8^{n+1}} : \left(\dfrac{2^n}{28^{-n}}\right)^{-1}$; б) $\left(\dfrac{1 + a^{-2}}{1 - a^{-2}}\right)^{-1}$.

Вариант 3

1. Вычислите:

а) $\left(-\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-3} \cdot (-2)^0$; в) $\left(\left(2\dfrac{3}{5}\right)^{-1} + \left(3\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right) \cdot ((-1{,}8)^0 + (-1)^{-1})$.

б) $\dfrac{5^{-3} \cdot 25^2}{(-125)^{-2}}$;

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(a^3)^{-3} \cdot (a^{-7})^{-2}}{(a^{-2})^{-4} : (a^{-2})^3}$; б) $\left(-\dfrac{4a}{3b^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{a^{-2}}{8b^4}\right)^{-1}$.

3. Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем:

а) $a^{-3} + 7a^5$; б) $a^{-3} + 7a^{-5}$; в) $a^3 + 7a^{-5}$.

4. Представьте в стандартном виде число $a = 0{,}00073 \cdot 10^{15}$ и найдите порядок числа:

а) $a \cdot 10^7$; б) $0{,}001 \cdot a$; в) $0{,}000001 \cdot a^2$.

5. Плотность воздуха при $T = 0$ °C равна $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Найдите массу воздуха в пустой классной комнате, если ее размеры 10, 18 и 3,5 м.

6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{3^{n+1} - 3^n}{15^{n+1}} : \left(\dfrac{5^n}{3^{-n}}\right)^{-1}$; б) $\left(\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{a + b}\right)^{-1}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Глава 7. **Функции и графики**

Подготовительный вариант

1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 4, найдите:

а) $D(f)$;

б) нули функции;

в) наибольшее и наименьшее значения функции;

г) $E(f)$;

д) промежутки знакопостоянства.

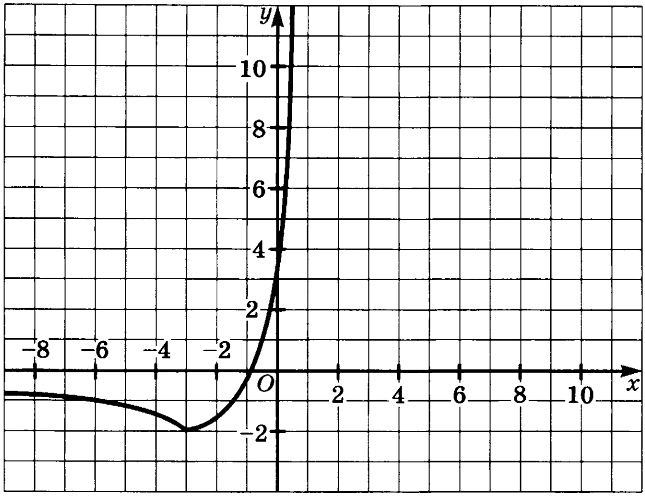


Рис. 4

2. Найдите расстояние от точки $M(a;\ b)$ графика функции $y = f(x)$:

а) до оси абсцисс, если $f(x) = \dfrac{12x - 3}{x - 2}$ и $a = 3$;

б) до оси ординат, если $f(x) = \dfrac{12x - 3}{x - 2}$ и $b = -3$.

3. Постройте график функции $y = f(x - m) + n$, если:

а) $f(x) = |x|$, $m = 3$, $n = 1$;

б) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $m = -2$, $n = 3$;

в) $f(x) = x^2$, $m = 1$, $n = -2$.

4. В одной системе координат постройте графики функций $f(x) = \dfrac{3x - 7}{x - 1}$ и $h(x) = -x + 7$. Найдите абсциссы точек пересечения этих графиков.

5. Докажите, что если коэффициент пропорциональности функции $f(x) = \dfrac{k}{x}$ положителен, то для $x_1 < x_2 < 0$ справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

6. Запишите уравнения осей симметрии графика функции:

а) $y = 5 - 2x + x^2$;

б) $y = \dfrac{2x + 6}{x + 2}$.

7. Расположите в порядке возрастания числа $(-5{,}2)^{-1}$, $(-5{,}2)^{-2}$, $(5{,}3)^{-2}$, $(5{,}2)^{-1}$, $(0{,}52)^{-1}$ и $(0{,}52)^{-2}$.

Вариант 1

1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 5, найдите:
   а) $D(f)$; в) нули функции;
   б) $E(f)$; г) промежутки знакопостоянства.

2. Найдите расстояние от точки $M(a;\ b)$ графика функции $y = f(x)$:

   а) до оси абсцисс, если $f(x) = \dfrac{7x-3}{x-1}$ и $a = -2$;

   б) до оси ординат, если $f(x) = \dfrac{7x-3}{x-1}$ и $b = 2$.

3. Постройте график функции $y = f(x - m) + n$, если:
   а) $f(x) = |x|$, $m = -2$, $n = 1$; в) $f(x) = x^2$, $m = -2$, $n = -2$.
   б) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$, $m = 2$, $n = 1$;

4. В одной системе координат постройте графики функций $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ и $h(x) = x + 2$. Найдите абсциссы точек пересечения этих графиков.

5. Докажите, что если коэффициент пропорциональности функции $f(x) = \dfrac{k}{x}$ отрицателен, то для $x_1 < x_2 < 0$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

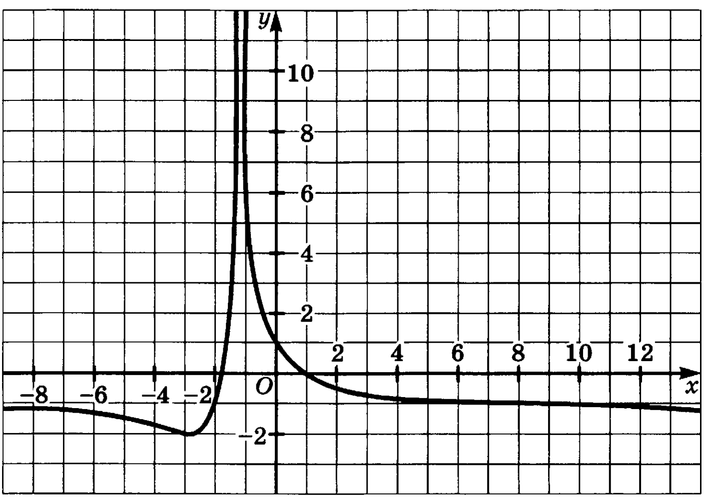


Рис. 5

6. Запишите уравнения осей симметрии графика функции:

а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = \dfrac{3x + 2}{x + 2}$.

7. Расположите в порядке возрастания числа $(-2,5)^{-1}$, $(-2,5)^{-2}$, $(2,7)^{-2}$, $(2,5)^{-1}$, $(0,25)^{-1}$ и $(0,25)^{-2}$.

Вариант 2

1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 6, найдите:
   а) $D(f)$; в) нули функции;
   б) $E(f)$; г) промежутки знакопостоянства.

2. Найдите расстояние от точки $M(a; b)$ графика функции $y = f(x)$:

   а) до оси абсцисс, если $f(x) = \dfrac{7x + 5}{x + 1}$ и $a = -2$;

   б) до оси ординат, если $f(x) = \dfrac{12x - 3}{x - 2}$ и $b = 2$.

3. Постройте график функции $y = f(x - m) + n$, если:
   а) $f(x) = |x|$, $m = 2$, $n = -1$; в) $f(x) = x^2$, $m = -1$, $n = 2$.

   б) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$, $m = -2$, $n = 1$;

4. В одной системе координат постройте графики функций $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ и $h(x) = x - 2$. Найдите абсциссы точек пересечения этих графиков.

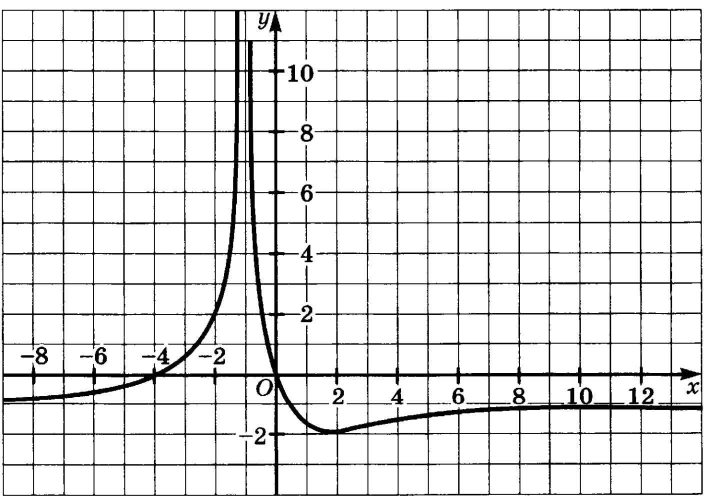


Рис. 6

5. Докажите, что если коэффициент пропорциональности функции $f(x) = \frac{k}{x}$ положителен, то для $x_1 > x_2 > 0$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

6. Запишите уравнения осей симметрии графика функции:

а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = \frac{3x - 2}{x - 2}$.

7. Расположите в порядке возрастания числа $(-3{,}1)^{-1}$, $(-3{,}1)^{-2}$, $(3{,}2)^{-2}$, $(3{,}1)^{-1}$, $(0{,}31)^{-1}$ и $(0{,}31)^{-2}$.

Вариант 3

1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 7, найдите:

а) $D(f)$; в) нули функции;
б) $E(f)$; г) промежутки знакопостоянства.

2. Найдите расстояние от точки $M(a;\ b)$ графика функции $y = f(x)$:

а) до оси абсцисс, если $f(x) = \frac{4 - 3x}{x + 3}$ и $a = 3$;

б) до оси ординат, если $f(x) = \frac{4 - 3x}{x + 3}$ и $b = -2$.

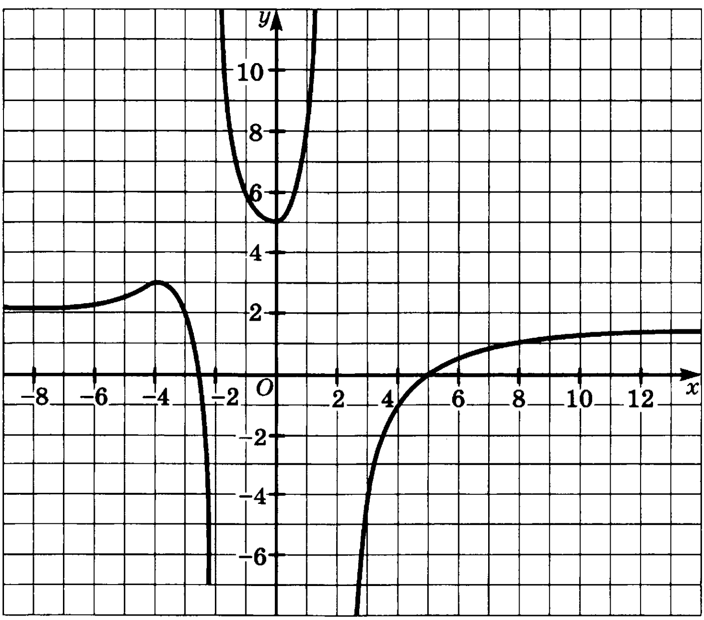


Рис. 7

3. Постройте график функции $y = f(x - m) + n$, если:

а) $f(x) = -|x|$, $m = -2$, $n = 1$;

б) $f(x) = -\frac{8}{x}$, $m = 2$, $n = 1$;

в) $f(x) = -x^2$, $m = -2$, $n = -2$.

4. В одной системе координат постройте графики функций $f(x) = \frac{4x - 6}{x - 2}$ и $h(x) = x + 1$. Найдите абсциссы точек пересечения этих графиков.

5. Докажите, что если коэффициент пропорциональности функции $f(x) = \frac{k}{x}$ отрицателен, то для $x_1 > x_2 > 0$ справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

6. Запишите уравнения осей симметрии графика функции:

а) $y = x^2 - 6x + 7$; б) $y = \frac{4 - 3x}{x + 3}$.

7. Расположите в порядке возрастания числа $(-2{,}5)^{-1}$, $(-2{,}5)^{-2}$, $(2{,}7)^{-2}$, $(2{,}5)^{-1}$, $(0{,}25)^{-1}$ и $(0{,}25)^{-2}$.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение
$f(x + 2) = f(x - 2) + 4$, если $f(x) = 3 + 2x + x^2$.

2. Известно, что при делении на 7 число a дает остаток 2. Какой остаток получится при делении на 7 числа $2a^2 - 3a + 4$?

3. Постройте график функции $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ и укажите:

а) нули функции;

б) область определения функции;

в) область значений функции;

г) промежутки знакопостоянства функции.

4. При каких целых значениях параметра a корень уравнения $x - 2 = ax + 3$ является:

а) целым числом; б) натуральным числом?

5. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее значения выражения $\frac{f(1 + \sqrt{3}) - f(1 - \sqrt{3})}{f(1 - \sqrt{3}) + f(1 + \sqrt{3})}$, где $f(x) = x^2 - 3$.

6. Найдите все целочисленные решения уравнения:
а) $xy = 2$; б) $xy + 2x = y + 4$.

7. Представьте дробь $\frac{13x + 4}{6x^2 + x - 2}$ в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени с целыми коэффициентами.

8. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a^3 + 8}{a^3 + 4a^2 + 4a} - \frac{2}{a + 2}\right) \cdot (a - 2)^{-2} \text{ при } a = -3.$$

9. Докажите, что при любом $n \in \mathbf{Z}$ значение выражения:
а) $3n^2 + 5n + 2$ кратно 2; б) $2n^3 + 7n - 3$ кратно 3.

10. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 4, а при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток получится при делении этого числа на 15?

11. Найдите наибольшее целое положительное решение системы

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant \frac{x - 1}{4}, \\ \frac{x - 1}{3} < \frac{x + 1}{5} - \frac{1}{15}. \end{cases}$$

12. На строительстве железной дороги работали две бригады. Первая бригада ежедневно прокладывала на 40 м путей больше второй и проложила 270 м путей. Вторая бригада работала на 2 дня больше и проложила 250 м путей. Сколько дней работала каждая бригада?

Вариант 1

1. Решите уравнение
$f(x + 1) + f(x - 1) = x^2$, если $f(x) = 2x + x^2 - 1$.

2. Известно, что при делении на 5 число a дает остаток 3. Какой остаток получится при делении на 5 числа $2a^2 - 5a + 4$?

3. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$ и укажите:
а) нули функции;
б) область определения функции;
в) область значений функции;
г) промежутки знакопостоянства функции.

4. При каких целых значениях параметра p корень уравнения $x + 3 = 5 - px$ является:
а) целым числом; б) натуральным числом?

5. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее значения выражения $\frac{f(2+\sqrt{5})-f(2-\sqrt{5})}{f(2-\sqrt{5})+f(2+\sqrt{5})}$, где $f(x) = 5 - x^2$.

6. Найдите все целочисленные решения уравнения:
а) $xy = 4$; б) $xy + x = 2y + 6$.

7. Представьте дробь $\frac{x-7}{x^2+x-2}$ в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени с целыми коэффициентами.

8. Найдите значение выражения
$$\left(\frac{3^{-1}}{9a^2+3a+1}+\frac{9a^3-a}{27a^3-1}\right):(3a+1)^{-2} \text{ при } a=\frac{2}{3}.$$

9. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
а) $n^2 - 5n + 2$ кратно 2; б) $n^3 + 2n - 3$ кратно 3.

10. Известно, что число a при делении на 7 дает остаток 4, а при делении на 3 — остаток 1. Какой остаток получится при делении этого числа на 21?

11. Найдите наибольшее целое положительное решение системы
$$\begin{cases} x-4 \leqslant 1-\frac{x-1}{4}, \\ 2x-0{,}5 > \frac{x}{2}-1{,}5. \end{cases}$$

12. Два экскаватора, работая совместно, могут вырыть котлован за 48 ч. За какое время каждый из них может вырыть котлован, работая в отдельности, если первому нужно для этого на 40 ч больше, чем второму?

Вариант 2

1. Решите уравнение
$f(x + 1) + f(x - 1) = x^2 - 2$, если $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

2. Известно, что при делении на 5 число a дает остаток 2. Какой остаток получится при делении на 5 числа $3a^2 - 2a + 6$?

3. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - 1$ и укажите:
а) нули функции;
б) область определения функции;
в) область значений функции;
г) промежутки знакопостоянства функции.

4. При каких целых значениях параметра b корень уравнения $bx - 1 = x + 4$ является:
а) целым числом; б) натуральным числом?

5. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее значения выражения $\dfrac{f(2+\sqrt{7}) - f(2-\sqrt{7})}{f(2-\sqrt{7}) + f(2+\sqrt{7})}$, где $f(x) = 7 - x^2$.

6. Найдите все целочисленные решения уравнения:
а) $xy = 9$; б) $xy + 2y = 3 - 3x$.

7. Представьте дробь $\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}$ в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени с целыми коэффициентами.

8. Найдите значение выражения
$\left(\dfrac{8a^3-2a}{8a^3+1} + \dfrac{1}{4a^2-2a+1}\right) : (2a-1)^{-2}$ при $a = 0{,}75$.

9. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
а) $n^2 + 3n - 2$ кратно 2; б) $n^3 - 4n + 3$ кратно 3.

10. Известно, что число a при делении на 7 дает остаток 1, а при делении на 5 — остаток 4. Какой остаток получится при делении этого числа на 35?

11. Найдите наименьшее целое отрицательное решение системы
$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} < \dfrac{x+2}{3}, \\ \dfrac{2x+3}{2} \geqslant \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

12. Две трубы, работая одновременно, наполнили бассейн за 12 ч. Первая труба, работая в отдельности, наполняет бассейн на 18 ч быстрее, чем вторая. За какое время наполняет бассейн вторая труба?

Вариант 3

1. Решите уравнение
$f(x-1) - f(x+2) = x^2$, если $f(x) = 2x + x^2$.

2. Известно, что при делении на 13 число a дает остаток 3. Какой остаток получится при делении на 13 числа $2a^2 + 2a + 1$?

3. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{4 - 4x + x^2} - 1$ и укажите:
   а) нули функции;
   б) область определения функции;
   в) область значений функции;
   г) промежутки знакопостоянства функции.

4. При каких целых значениях параметра p корень уравнения $2x - 1 = 2 - px$ является:
   а) целым числом; б) натуральным числом?

5. Найдите наименьшее целое число, не превосходящее значения выражения $\dfrac{f\left(3 + \sqrt{5}\right) - f\left(3 - \sqrt{5}\right)}{f\left(3 - \sqrt{5}\right) + f\left(3 + \sqrt{5}\right)}$, где $f(x) = x^2 - 5$.

6. Найдите все целочисленные решения уравнения:
   а) $xy = 1$; б) $xy + x = 2y + 3$.

7. Представьте дробь $\dfrac{7x}{2x^2 - x - 6}$ в виде суммы двух дробей, знаменатели которых являются двучленами первой степени с целыми коэффициентами.

8. Найдите значение выражения
   $$\left(\frac{a^3 - 64}{a^3 - 8a^2 + 16a} + \frac{4}{a - 4}\right) \cdot (a + 4)^{-2} \text{ при } a = -3.$$

9. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
   а) $5n^2 - 7n - 6$ кратно 2; б) $4n^3 + 5n - 6$ кратно 3.

10. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток получится при делении этого числа на 15?

11. Найдите наименьшее целое решение системы
    $$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{x + 1}{3}, \\ 4x + 0{,}5 > -x - 10. \end{cases}$$

12. Два грузовика, работая вместе, перевозили зерно в течение 4 ч. За какое время перевезет то же количество зерна каждый грузовик в отдельности, если первому нужно для этого на 6 ч больше, чем второму?

ТЕСТЫ

ТЕСТ 1

Числовые дроби и дроби, содержащие переменные. Свойства дробей (п. 1, 2)

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{2a + b^2}{ab}$ при $a = 2$, $b = -1$.

1) $-1{,}5$; 2) 5; 3) $2{,}5$; 4) $-2{,}5$.

2. Сократите дробь $\frac{8x^3y^6}{40xy^3}$.

1) $\frac{x^2y^3}{5}$; 2) $\frac{x^2y^2}{5}$; 3) $\frac{x^4y^3}{5}$; 4) $\frac{x^2}{5y^3}$.

3. Сократите дробь $\frac{2n - 8k}{16k^2 - n^2}$.

1) $-\frac{2}{4k + n}$; 2) $\frac{2}{4k + n}$; 3) $\frac{2}{4k - n}$; 4) $\frac{2}{n - 4k}$.

4. Представьте дробь $\frac{c - 5}{c + 1}$ в виде дроби со знаменателем $(c^2 + c)$.

1) $\frac{c(c - 5)}{c^2 + c}$; 2) $\frac{(c - 5)}{c^2 + c}$; 3) $\frac{1}{c^2 + c}$; 4) $\frac{c}{c^2 + c}$.

5. При каких значениях переменной выражение $\frac{x + 2}{6x - 3}$ не имеет смысла?

1) -2; 2) -2 и $0{,}5$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$.

6. Вычислите $\frac{2x + 4y}{x^2 + 4xy + 4y^2 + 5}$, если $x + 2y = 5$.

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) невозможно вычислить.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\frac{2a + x}{a^2 - x^2}$ при $a = 2$, $x = -1$.

1) $0{,}6$; 2) -1; 3) 1; 4) $-0{,}6$.

2. Сократите дробь $\frac{42a^{10}b^3}{6a^5b^4}$.

1) $\frac{7a^2}{b}$; 2) $\frac{8a^5}{b}$; 3) $\frac{7a^5}{b}$; 4) $\frac{7a^5}{6b^4}$.

3. Сократите дробь $\frac{1 + b^2 - 2b}{b^2 - 1}$.

1) $-2b$; 2) $\frac{1 - b}{b + 1}$; 3) $\frac{1 + b}{b - 1}$; 4) $\frac{b - 1}{b + 1}$.

4. Представьте дробь $\frac{x + 6}{x - 1}$ в виде дроби со знаменателем $(3x - 3)$.

1) $\frac{3(x + 6)}{3x - 3}$; 2) $\frac{x + 6}{3x - 3}$; 3) $\frac{1}{3x - 3}$; 4) $\frac{3x + 6}{3x - 3}$.

5. При каких значениях переменной выражение $\frac{c - 2}{4c(c + 1)}$ не имеет смысла?

1) 2; 2) 0 и -1; 3) -1; 4) 4.

6. Вычислите $\frac{9x^2 + 15x - y^2 + 5y}{3x + y}$, если $3x - y = 2$.

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) невозможно вычислить.

ТЕСТ 2

Сложение и вычитание дробей. Умножение дробей. Возведение дроби в степень. Деление дробей (п. 3, 5, 6)

Вариант 1

1. Сложите дроби $\frac{x - 3}{2x - 3}$ и $\frac{x + 2}{3 - 2x}$.

1) $\frac{2x - 1}{2x - 3}$; 2) $\frac{5}{2x - 3}$; 3) $\frac{-5}{2x - 3}$; 4) $\frac{x - 1}{4x^2 - 9}$.

2. Представьте дробь $\frac{y^5 - y^2}{y^4}$ в виде разности.

1) $y^5 - \frac{1}{y^2}$; 2) $y^5 - y^2$; 3) $y - \frac{1}{y^2}$; 4) другой ответ.

3. Выполните вычитание: $\frac{11x-4}{14x}-\frac{3x-2}{14x}$.

1) $\frac{4x-3}{7x}$; 2) $\frac{4x-1}{7x}$; 3) $\frac{8x-4}{7x}$; 4) $\frac{7x-2}{7x}$.

4. Преобразуйте данное выражение $\frac{m^2}{m^2-16}-\frac{m}{m+4}$ в дробь.

1) $\frac{4m}{m^2-16}$; 2) $-\frac{4m}{m^2-16}$; 3) $\frac{m^2-m}{m^2-16}$; 4) $\frac{m-1}{m+4}$.

5. Выполните умножение: $4a^2x^5\cdot\frac{3}{7ax}$.

1) ax^4; 2) $\frac{4ax^4}{7}$; 3) $\frac{12ax^4}{7}$; 4) другой ответ.

6. Выполните деление: $\left(\frac{x}{3}\right)^3:\left(\frac{x}{6}\right)^2$.

1) $\frac{4x}{3}$; 2) $\frac{4}{3x}$; 3) $\frac{x}{18}$; 4) другой ответ.

Вариант 2

1. Сложите дроби $\frac{a+2}{a-1}$ и $\frac{a+5}{1-a}$.

1) $\frac{2a+7}{a-1}$; 2) $\frac{3}{a-1}$; 3) $\frac{3}{1-a}$; 4) $\frac{2a+7}{a^2-1}$.

2. Представьте дробь $\frac{7x+3}{x}$ в виде суммы.

1) $\frac{7}{x}+\frac{3}{x}$; 2) $7x+\frac{3}{x}$; 3) $7+\frac{3}{x}$; 4) другой ответ.

3. Выполните вычитание: $\frac{5}{x^2-2x}-\frac{4x+3}{x^2-2x}$.

1) $-\frac{4}{x}$; 2) $\frac{-4x+2}{x^2-2x}$; 3) $\frac{4}{x}$; 4) $\frac{4x+8}{x^2-2x}$.

4. Преобразуйте данное выражение $\frac{x^2+4}{x+2}+x-2$ в дробь.

1) $\frac{2x^2+1}{x+2}$; 2) $\frac{2x^2}{x+2}$; 3) $\frac{2x}{x+2}$; 4) $\frac{4}{x+2}$.

5. Возведите в степень: $\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^3$.

1) $\frac{8x^5}{y^6}$; 2) $\frac{8x^6}{y^9}$; 3) $\frac{2x^6}{y^9}$; 4) другой ответ.

6. Выполните деление: $\frac{17a^4}{b^7} : \frac{51a^3}{b^5}$.

1) $\frac{a^7}{3b^2}$; 2) $\frac{3b^2}{a}$; 3) $\frac{a}{3b^2}$; 4) другой ответ.

ТЕСТ 3

Делимость чисел (§ 5)

Вариант 1

1. Укажите пару взаимно простых чисел.
1) 7 и 24; 2) 9 и 20; 3) 6 и 14; 4) 30 и 125.

2. Какую цифру нужно поставить вместо *, чтобы число 31*21 делилось на 9?
1) 0; 2) 9; 3) 2; 4) 4.

3. Какое из данных чисел делится на 45?
1) 21 305; 2) 430 025; 3) 115 452; 4) 1 020 330.

4. Найдите НОД(a, b), если $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $b = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.
1) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$; 2) 1; 3) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; 4) $3 \cdot 5^2$.

5. Найдите НОК(a, b), если $a = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^4$, $b = 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$.
1) 1; 2) $5^2 \cdot 7^2$; 3) $2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^4$; 4) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^4$.

6. Известно, что $a = 13b$, где $b \neq 1$, $b \in N$. Найдите НОК(a, b).
1) 1; 2) 13; 3) a; 4) b.

Вариант 2

1. Укажите пару взаимно простых чисел.
1) 12 и 16; 2) 18 и 33; 3) 40 и 15; 4) 10 и 27.

2. Какую цифру нужно поставить вместо *, чтобы число 100*2 делилось на 9?
1) 9; 2) 6; 3) 3; 4) 0.

3. Какое из данных чисел делится на 15?
1) 100 015; 2) 4224; 3) 8007; 4) 1 002 210.

4. Найдите НОД(a, b), если $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$, $b = 2 \cdot 5^3 \cdot 7^3$.
1) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4$; 3) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$;
2) 1; 4) $2 \cdot 7^3$.

5. Найдите НОК(a, b), если $a = 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13$, $b = 5^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.
1) $11 \cdot 13$;
2) $5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2$;
3) $5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2$;
4) 1.

6. Известно, что $a = 40b$, где $b \neq 1$, $b \in N$. Найдите НОК(a, 40).
1) 40; 2) 1; 3) b; 4) a.

ТЕСТ 4

Абсолютная и относительная погрешность
(п. 20)

Вариант 1

1. Если $\frac{1}{3} \approx 0{,}34$, то абсолютная погрешность приближенного значения числа $\frac{1}{3}$ равна:
1) 0,01; 2) −0,01; 3) $\frac{1}{150}$; 4) $-\frac{1}{150}$.

2. Укажите приближенное значение массы m, которое показывает стрелка (рис. 8), и точность измерения h.
1) $m \approx 130$ г, $h = 10$ г;
2) $m \approx 160$ г, $h = 20$ г;
3) $m \approx 180$ г, $h = 10$ г;
4) $m \approx 150$ г, $h = 20$ г.

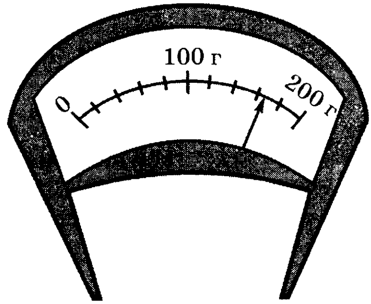


Рис. 8

3. Округлите число 3,48 до единиц. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.
1) 16%; 3) 13%;
2) 48%; 4) 52%.

4. Приближенное значение площади квадрата со стороной 1,8 см считают равным 4 см^2. Какова абсолютная погрешность этого приближенного значения?
1) 0,04 см^2; 2) 3,24 см^2; 3) 0,8 см^2; 4) 0,76 см^2.

5. Приближенное значение числа x равно 7,5, а абсолютная погрешность равна h. Оцените h, если относительная погрешность приближения не превосходит 2%.
1) $h \leqslant 1{,}5$; 2) $h \leqslant 0{,}375$; 3) $h \leqslant 0{,}15$; 4) $h \leqslant 3{,}75$.

6. Число a округлили до единиц и получили 4. Относительная погрешность этого округления равна 5%. Найдите число a.
1) 4,5; 2) 4,2 или 3,8; 3) 3,8; 4) 4,2.

Вариант 2

1. Если $\frac{1}{6} \approx 0{,}16$, то абсолютная погрешность приближенного значения числа $\frac{1}{6}$ равна:
1) $-\frac{1}{150}$; 2) 0,01; 3) $-0{,}01$; 4) $\frac{1}{150}$.

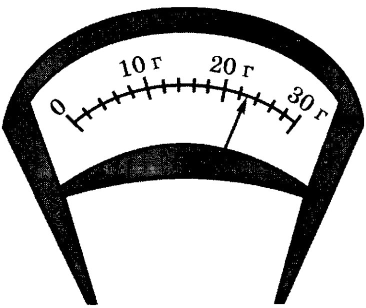


Рис. 9

2. Укажите приближенное значение массы m, которое показывает стрелка (рис. 9), и точность измерения h.
1) $m \approx 21$ г, $h = 1$ г;
2) $m \approx 22$ г, $h = 1$ г;
3) $m \approx 22$ г, $h = 2$ г;
4) $m \approx 21$ г, $h = 2$ г.

3. Округлите число 5,76 до единиц. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.
1) 24%; 3) 15,2%;
2) 76%; 4) 4%.

4. Приближенное значение площади квадрата со стороной 3,2 см считают равным 9 см^2. Какова абсолютная погрешность этого приближенного значения?
1) 10,24 см^2; 2) 1,24 см^2; 3) 0,04 см^2; 4) 0,64 см^2.

5. Приближенное значение числа x равно 10,5, а абсолютная погрешность равна h. Оцените h, если относительная погрешность приближения не превосходит 3%.
1) $h \leqslant 3{,}05$; 2) $h \leqslant 0{,}315$; 3) $h \leqslant 3{,}15$; 4) $h \leqslant 0{,}305$.

6. Число a округлили до единиц и получили 5. Относительная погрешность этого округления равна 4%. Найдите число a.
1) 5,2; 2) 4,8 или 5,2; 3) 4,8; 4) 4,2.

ТЕСТ 5

Арифметический квадратный корень (п. 21)

Вариант 1

1. Вычислите: $\sqrt{0{,}09}$.
1) 0,03; 2) 0,3; 3) 3; 4) 9.

2. Решите уравнение $\frac{1}{4}a^2 = 100$.
1) 5; 2) 20; 3) 5; –5; 4) 20; –20.

3. Найдите значение x, при котором $3\sqrt{x} - 2 = 0$.
1) $\frac{4}{9}$; 2) 2,25; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$.

4. Применив свойства арифметического корня, вычислите: $\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}49}$.
1) 0,0035; 2) 0,35; 3) 3,5; 4) 0,035.

5. Упростите выражение $\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2}$.
1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) $2 - \sqrt{5}$; 4) $\sqrt{5} - 2$.

6. Даны числа: $\sqrt{36}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{0{,}9}$, $\sqrt{0{,}09}$. Сколько среди них иррациональных?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Вариант 2

1. Вычислите: $\sqrt{2\frac{1}{4}}$.
1) $\frac{3}{4}$; 2) 1,4; 3) $1\frac{1}{4}$; 4) 1,5.

2. Решите уравнение $\frac{1}{2}x^2 = 8$.
1) 2; 2) 2; –2; 3) 4; 4) 4; –4.

3. Найдите значение y, при котором $5 - 2\sqrt{y} = 0$.
1) 2,5; 2) $\frac{4}{25}$; 3) $\frac{25}{4}$; 4) $\frac{25}{4}$; $-\frac{25}{4}$.

4. Применив свойства арифметического корня, вычислите: $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$.
1) 5; –5; 2) 25; 3) 5; 4) 25; –25.

5. Упростите выражение $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) $2-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}-2$.

6. Даны числа: $\sqrt{48}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{2{,}5}$. Сколько среди них рациональных?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

ТЕСТ 6

Свойства арифметического квадратного корня
(п. 24, 25)

Вариант 1

1. Вынесите множитель из-под знака корня: $0{,}2\sqrt{50}$.

1) $0{,}1\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $0{,}5\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}$.

2. Внесите множитель под знак корня: $-\frac{1}{2}\sqrt{8a}$.

1) $-\sqrt{2a}$; 2) $\sqrt{-2a}$; 3) $-\sqrt{4a}$; 4) другой ответ.

3. Упростите выражение $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{56}$.

1) $5+2\sqrt{14}$; 2) 5; 3) 9; 4) $9+2\sqrt{14}$.

4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{12}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$.

1) 4; 3) $4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$;

2) $4\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$; 4) $\frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{9}$.

5. Найдите наибольшее среди данных чисел.

1) $\frac{1}{3}\sqrt{39}$; 2) $6\sqrt{\frac{1}{3}}$; 3) $2\sqrt{3{,}5}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{52}$.

6. Вынесите множитель из-под знака радикала: $\sqrt{\frac{a^8b}{c^2}}$, $c<0$.

1) $\frac{a^4\sqrt{b}}{c}$; 2) $\frac{a^6\sqrt{b}}{c}$; 3) $-\frac{a^4\sqrt{b}}{c}$; 4) другой ответ.

Вариант 2

1. Вынесите множитель из-под знака корня: $\frac{3}{5}\sqrt{150}$.

   1) 18; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $9\sqrt{10}$; 4) $6\sqrt{3}$.

2. Внесите множитель под знак корня: $-\frac{1}{5}\sqrt{10x}$.

   1) $-\sqrt{0{,}4x}$; 2) $\sqrt{-0{,}4x}$; 3) $-\sqrt{2x}$; 4) другой ответ.

3. Упростите выражение $(5\sqrt{2} - 6)(5\sqrt{2} + 6) + 6$.

   1) 14; 2) 10; 3) 20; 4) $25\sqrt{2} - 30$.

4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{6}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$.

   1) 2; 3) $2\sqrt{3}$;

   2) $2(\sqrt{6} + \sqrt{3})$; 4) $\frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{3}$.

5. Найдите наибольшее среди данных чисел.

   1) $3\sqrt{5}$; 2) $5\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{53}$; 4) $7\sqrt{2}$.

6. Внесите множитель под знак радикала: $2y\sqrt{-2y}$.

   1) $\sqrt{4y^2}$; 2) $\sqrt{-8y^2}$; 3) $-\sqrt{-8y^2}$; 4) $\sqrt{-4y^2}$.

ТЕСТ 7

Квадратное уравнение и его корни (§ 9)

Вариант 1

1. В квадратном уравнении $x^2 + 3 - 4x = 0$ укажите коэффициент b.

   1) 3; 2) 4; 3) −4; 4) 1.

2. Среди чисел −3; 3; −4; −1 найдите корень уравнения $x^2 + 5x + 6 = 0$.

   1) −3; 2) 3; 3) −4; 4) −1.

3. Решите уравнение $(x - 2)(x + 2) = 4$.

   1) 6; 4; 3) 0;

   2) нет корней; 4) $\pm 2\sqrt{2}$.

4. Найдите корни уравнения $-x^2 + 3 = 7x + 3$.
1) 7; 2) 0; −7; 3) нет корней; 4) 0; 7.

5. Выделите квадрат двучлена в выражении $x^2 + 8x + 15$.
1) $(x + 4)^2 - 16$; 3) $(x + 4)^2 - 1$;
2) $(x + 2)^2 + 4x + 11$; 4) $(x + 4)^2 + 1$.

6. Площадь прямоугольника равна 48 см². Одна его сторона в 3 раза больше другой. Найдите большую сторону прямоугольника.
1) 12 см; 2) 8 см; 3) 24 см; 4) 16 см.

Вариант 2

1. В квадратном уравнении $7x - 5 - x^2 = 0$ укажите коэффициент a.
1) 7; 2) −1; 3) −5; 4) 1.

2. Среди чисел −3; −4; 3; 2 найдите корень уравнения $x^2 - x - 12 = 0$.
1) −4; 2) 2; 3) 3; 4) −3.

3. Решите уравнение $(x - 0{,}3)(x + 0{,}3) = 0{,}16$.
1) ±0,3; 3) 0,13; 0,19;
2) нет корней; 4) ±0,5.

4. Найдите корни уравнения $(1 + x)^2 + 2x = 1$.
1) 0; −4; 2) нет корней; 3) 0; 4) 0; 4.

5. Выделите квадрат двучлена в выражении $x^2 - 6x + 8$.
1) $(x - 6)^2 - 28$; 3) $(x - 3)^2 - 1$;
2) $(x - 2)^2 - 2x + 4$; 4) $(x - 3)^2 + 1$.

6. Площадь прямоугольника равна 24 см². Одна его сторона в 1,5 раза больше другой. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
1) 4 см; 2) 3 см; 3) 6 см; 4) 8 см.

ТЕСТ 8

Свойства корней квадратного уравнения (п. 31, 32)

Вариант 1

1. Дискриминант уравнения $7x^2 + 6x + 1 = 0$ равен:
1) 32; 2) 8; 3) −64; 4) 2.

2. Разность большего и меньшего корней уравнения $x^2 - 9x + 14 = 0$ равна:
1) 5; 2) 3; 3) 10; 4) другой ответ.

3. Не имеет корней уравнение:

1) $7x^2 - 3x - 8 = 0$;   3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;

2) $4x^2 - 11x + 5 = 0$;   4) $2x^2 + x + 2 = 0$.

4. Сумма и произведение корней уравнения $x^2 + 7x - 1 = 0$ равны:

1) $x_1 + x_2 = 7,\ x_1 \cdot x_2 = 1$;   3) $x_1 + x_2 = -7,\ x_1 \cdot x_2 = -1$;

2) $x_1 + x_2 = 1,\ x_1 \cdot x_2 = 7$;   4) $x_1 + x_2 = -1,\ x_1 \cdot x_2 = 7$.

5. Если 7 — корень уравнения $x^2 + px - 35 = 0$, то значение p равно:

1) 2;   2) –2;   3) 12;   4) –12.

6. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то сумма $x_1^2 + x_2^2$ равна:

1) p^2;   2) $q^2 - 2p$;   3) $-p^2 - 2q$;   4) $p^2 - 2q$.

Вариант 2

1. Дискриминант уравнения $5x^2 - 3x + 2 = 0$ равен:

1) 19;   2) –1;   3) 49;   4) –31.

2. Разность большего и меньшего корней уравнения $x^2 + 5x - 24 = 0$ равна:

1) 11;   2) 1;   3) 7;   4) другой ответ.

3. Имеет два различных корня уравнение:

1) $5x^2 + 2x + 1 = 0$;   3) $5x^2 + 2x - 1 = 0$;

2) $5x^2 - 2x + 1 = 0$;   4) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

4. Если $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$ — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то:

1) $p = 1,\ q = -12$;   3) $p = 12,\ q = 1$;

2) $p = -1,\ q = -12$;   4) $p = -12,\ q = 1$.

5. Если 11 — корень уравнения $x^2 - 13x + q = 0$, то значение q равно:

1) 22;   2) –22;   3) –264;   4) 264.

6. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то сумма $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ равна:

1) $\frac{p}{q}$;   2) $\frac{q}{p}$;   3) $-\frac{q}{p}$;   4) $-\frac{p}{q}$.

ТЕСТ 9

Дробно-рациональные уравнения (п. 34)

Вариант 1

1. Дробным рациональным является уравнение:

1) $x + 5 = x^2 - 8$; 3) $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x-1}$;

2) $2x = \sqrt{x}$; 4) $\frac{x^2 - 2}{|x| - 1} = 2$.

2. Одним из корней уравнения $\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{x^2 + 7x + 6}{x + 1}$ является:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

3. Дроби $\frac{y}{1 - y}$ и $\frac{3y - 8}{y - 1}$ равны, если y равен:

1) 4; 2) 2; 3) −2; 4) 1.

4. Решением уравнения $\frac{m^2 - 2m}{m - 1} - \frac{2m - 1}{1 - m} = 0$ является:

1) ±1; 2) 2; 3) 1; 4) −1.

5. Значение функции $y = \frac{2x + 1}{x - 4}$ равно 5 при значении аргумента, равном:

1) 7; 2) 6; 3) 11; 4) 10.

6. Дробь $\frac{2x^2 + 7x + 3}{4x^2 - 1}$ равна нулю:

1) при $x = -0{,}5$, $x = -3$; 3) при $x = 3$;

2) при $x = -3$; 4) ни при каких значениях x.

Вариант 2

1. Дробным рациональным является уравнение:

1) $\frac{2x - 3}{x + 2} = 1$; 3) $x = \frac{x^2 - 5}{5}$;

2) $\frac{\sqrt{x - 1}}{x + 2} - 3\sqrt{x} = 0$; 4) $\frac{|x| + 3}{x + 1} = 2x$.

2. Одним из корней уравнения $x^2 = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 6}$ является:

1) −1; 2) 2; 3) −0,5; 4) 0.

3. Дроби $\frac{2-3y}{y-5}$ и $\frac{2y}{5-y}$ равны, если y равен:
1) 2; 2) −2; 3) 0,4; 4) 0,5.

4. Решением уравнения $\frac{3m-1}{m-3} - \frac{1-m^2}{3-m} = 0$ является:
1) 0; 2) 0; 3; 3) 1; 2; 4) 3.

5. Значение функции $y = \frac{3x+1}{x-2}$ равно 4 при значении аргумє
та, равном:
1) 6,5; 2) 9; 3) 3; 4) 2.

6. Дробь $\frac{2x^2+x-6}{x^2+4x+4}$ равна нулю:
1) при $x = 1{,}5$, $x = -2$;
2) при $x = 1{,}5$;
3) при $x = -1{,}5$;
4) ни при каких значениях x.

ТЕСТ 10

Свойства числовых неравенств. Оценка значений выражений (п. 37, 38)

Вариант 1

1. Если $a + 8 \geqslant b + 8$, то:
1) $a \leqslant b$; 2) $a < b$; 3) $a \geqslant b$; 4) $a > b$.

2. Если $a < b$, то:
1) $-5a < -5b$ и $2a < 2b$;
2) $-5a < -5b$ и $2a > 2b$;
3) $-5a > -5b$ и $2a < 2b$;
4) $-5a > -5b$ и $2a > 2b$.

3. Если $3 < x < 5$ и $6 < y < 7$, то:
1) $3 < y - x < 2$;
2) $2 < y - x < 3$;
3) $1 < y - x < 4$;
4) $4 < y - x < 6$.

4. При любых значениях a и b верно, что:
1) $a(a + b) > ab$;
2) $a(a + b) \geqslant ab$;
3) $a(a + b) < ab$;
4) $a(a + b) \leqslant ab$.

5. Если $c - a > 8$ и $a - b > -7$, то:
1) $c > b$; 2) $a > c$; 3) $c < b$; 4) $c = b$.

6. Если $2 < a < 11$, $-3 < c < -2$, $-4 < d < -3$, то:
1) $6 < \frac{cd}{a+1} < 9$;
2) $-2 < \frac{cd}{a+1} < -1$;
3) $1 < \frac{cd}{a+1} < 2$;
4) $\frac{1}{2} < \frac{cd}{a+1} < 4$.

Вариант 2

1. Если $a > b$, то:
1) $a - 11 > b - 11$ и $a + 3 > b + 3$;
2) $a - 11 < b - 11$ и $a + 3 > b + 3$;
3) $a - 11 < b - 11$ и $a + 3 < b + 3$;
4) $a - 11 > b - 11$ и $a + 3 < b + 3$.

2. Если $-9a \geqslant -9b$, то:
1) $a > b$; 2) $a \geqslant b$; 3) $a \leqslant b$; 4) $a < b$.

3. Если $2 < x < 8$ и $4 < y < 12$, то:
1) $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < 2$;
2) $\frac{1}{6} < \frac{x}{y} < 2$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$.

4. При любых значениях a и b верно, что:
1) $2ab \leqslant a^2 + b^2$; 3) $2ab > a^2 + b^2$;
2) $2ab < a^2 + b^2$; 4) $2ab \geqslant a^2 + b^2$.

5. Если $\frac{a}{c} > \frac{b+1}{b}$ и $c > b$, где a, b и c — положительные числа, то:
1) $a = c$; 2) $c > b > a$; 3) $c > a > b$; 4) $a > c > b$.

6. Если $0 < a < 4$, $-5 < c < -3$, $-3 < b < -1$, то:
1) $3 < cb - \frac{a}{2} < 13$; 3) $-17 < cb - \frac{a}{2} < -3$;
2) $-15 < cb - \frac{a}{2} < -5$; 4) $1 < cb - \frac{a}{2} < 15$.

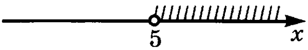
ТЕСТ 11

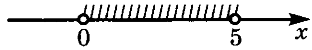
Свойства числовых неравенств. Числовые промежутки (п. 37, 18)

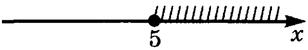
Вариант 1

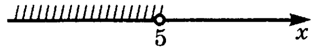
1. Если $m < 5 < n$, то верно неравенство:
1) $m - 5 > 0$; 3) $5 - n < 0$;
2) $m - n > 0$; 4) $5 - m < 0$.

2. Неравенству $x > 5$ соответствует геометрическая модель:

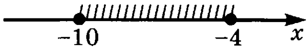
1) 

3) 

2) 

4) 

3. Геометрической модели



соответствует неравенство:
1) $-10 < x < -4$; 3) $x \geqslant -10$;
2) $-10 \leqslant x \leqslant -4$; 4) $x \leqslant -4$.

4. Геометрической модели

соответствует промежуток:
1) $(-1; 5)$; 2) $(1; 5]$; 3) $[-1; 5)$; 4) $(-1; 5]$.

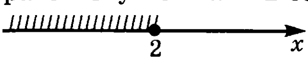
5. Наименьшим целым числом промежутка $[-5{,}9; +\infty)$ является число:
1) 1; 2) 0; 3) –5; 4) –6.

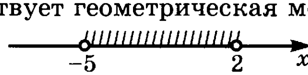
6. Объединением промежутков $(-\infty; 2)$ и $(-1; 3]$ является множество:
1) $(-\infty; 3]$; 3) $(-\infty; -1) \cup (2; 3]$;
2) $(-1; 2)$; 4) $(2; 3]$.

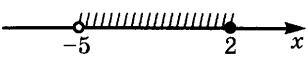
Вариант 2

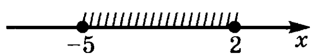
1. Получится верное числовое неравенство, если вместо m в неравенство $1 < -3m$ подставить число:
1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) –1.

2. Неравенству $-5 < x \leqslant 2$ соответствует геометрическая модель:

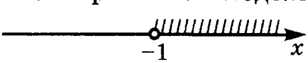
1) 

3) 

2) 

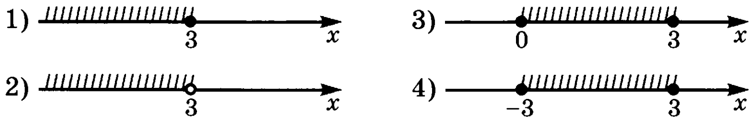
4) 

3. Геометрической модели



соответствует неравенство:
1) $-1 < x < 0$; 3) $x > -1$;
2) $x < -1$; 4) $x \geqslant -1$.

4. Промежутку $(-\infty; 3]$ соответствует геометрическая модель:



5. Натуральных чисел в промежутке $(-3{,}9; 2)$:
1) одно; 2) два; 3) три; 4) пять.

6. Пересечением промежутков $(-7; -2)$ и $[-3; 5)$ является множество:
1) $(-3; -2)$; 2) $[-3; -2)$; 3) $(-7; 5)$; 4) $(-2; 5)$.

ТЕСТ 12

Решение неравенств с одной переменной и их систем (§ 13)

Вариант 1

1. Решите неравенство $-2x < 5$.
1) $x < -2{,}5$; 3) $-x < 2{,}5$;
2) $x > -2{,}5$; 4) $x > 7$.

2. При каких значениях аргумента функция $y = 0{,}5x - 3$ принимает положительные значения?
1) При $x > 1{,}5$; 3) при $x > 6$;
2) при $x < 6$; 4) при $x > 2{,}5$.

3. Укажите все значения переменной, при которых имеет смысл выражение $\sqrt{1 - 2a}$.
1) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; 4) $(-1; +\infty)$.

4. Какое из чисел является решением системы $\begin{cases} 3x < 17, \\ 2x + 1 > 3? \end{cases}$
1) -1; 2) 1; 3) 2; 4) 6.

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3 > 3, \\ 2x + 1 > x - 1. \end{cases}$
1) $(3; +\infty)$; 3) $(-2; 3)$;
2) $(-2; +\infty)$; 4) решений нет.

6. Решите двойное неравенство $2{,}5 \leqslant 3x + 1 \leqslant 4$.

1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 4) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $-2 < \frac{x}{2}$.

1) $x > -4$; 2) $x < 4$; 3) $x > -1$; 4) $x < 1$.

2. При каких значениях аргумента функция $y = 5 - x$ принимает значения, не меньше 1 ($y \geqslant 1$)?

1) При $x \geqslant 4$; 3) при $x \leqslant 6$;
2) при $x \geqslant -4$; 4) при $x \leqslant 4$.

3. Укажите все значения переменной, при которых имеет смысл выражение $\sqrt{3 + a}$.

1) $(-3; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$;
2) $[-3; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$.

4. Какое из чисел является решением системы $\begin{cases} x - 1 > -3, \\ -7x > 0? \end{cases}$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) -1.

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3 \geqslant 3 - x, \\ 2x + 1 > x - 1. \end{cases}$

1) Решений нет; 3) $[2; +\infty)$;
2) $(-2; +\infty)$; 4) $(-2; 2]$.

6. Решите двойное неравенство $-6 \leqslant 2x + 4 \leqslant 6$.

1) $[-5; 1]$; 3) $[1; 7]$;
2) $(-5; 1)$; 4) $(-\infty; 1]$.

ТЕСТ 13

Степень с целым показателем (§ 14). **Стандартный вид числа** (п. 46)

Вариант 1

1. Вычислите: 2^{-4}.

1) -16; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) -8.

2. Упростите выражение $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^2$.

1) $\frac{3}{4}a^{-2}b^{-6}$; 3) $\frac{3}{4}ab^{-1}$;

2) $\frac{9}{16}a^2b^6$; 4) $\frac{9}{16}a^{-2}b^{-6}$.

3. Вычислите: $(-0{,}4)^{-2}$.

1) 0,16; 2) $-\frac{25}{4}$; 3) 6,25; 4) –0,16.

4. Запишите в стандартном виде число 0,000251.
1) $2{,}51 \cdot 10^{-4}$; 3) $0{,}251 \cdot 10^{-3}$;
2) $251 \cdot 10^{-6}$; 4) $25{,}1 \cdot 10^{-5}$.

5. Выполните действие и запишите результат в стандартном виде: $(4{,}8 \cdot 10^{-2}) : (1{,}2 \cdot 10^{-6})$.
1) $4 \cdot 10^4$; 3) $4 \cdot 10^{-3}$;
2) $4 \cdot 10^{-8}$; 4) $0{,}4 \cdot 10^5$.

6. Представьте выражение $0{,}01 \cdot 10^{-3}$ в виде степени с основанием 10.
1) 10^2; 2) 10^{-5}; 3) 10^{-4}; 4) 10^{-6}.

Вариант 2

1. Вычислите: $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

1) 36; 2) –36; 3) $\frac{1}{36}$; 4) $-\frac{1}{36}$.

2. Упростите выражение $(3a^2b^{-3}) \cdot (2a^{-1}b)$.
1) $3ab^{-2}$; 2) $6ab^{-2}$; 3) $6a^{-2}b^{-3}$; 4) $6ab^{-3}$.

3. Вычислите: $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

1) $-\frac{9}{16}$; 2) $\frac{9}{16}$; 3) $1\frac{1}{9}$; 4) $\frac{16}{9}$.

4. Запишите в стандартном виде число $548 \cdot 10^{-5}$.
1) $5{,}48 \cdot 10^{-7}$; 3) $5{,}48 \cdot 10^{-4}$;
2) $0{,}548 \cdot 10^{-2}$; 4) $5{,}48 \cdot 10^{-3}$.

5. Выполните действие и запишите результат в стандартном виде: $(4{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{-3})$.
1) $9 \cdot 10^{-6}$; 2) $0{,}9 \cdot 10^{-7}$; 3) $9 \cdot 10^9$; 4) 9.

6. Представьте выражение $27 : 3^{-4}$ в виде степени с основанием 3.
1) 3^7; 2) 3^{-1}; 3) 3^{-7}; 4) 3^5.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

В этом разделе приводятся дополнительные упражнения, содержащие параметр. Решение данных задач целесообразно рассмотреть при итоговом повторении, хотя можно это сделать и в процессе изучения и закрепления нового материала[1].

Глава 1. **Дроби**

1. При каком значении параметра a областью допустимых значений переменной в выражении $\frac{2x+1}{x^2+2x+a}$ является:

а) множество всех чисел;
б) множество всех чисел, кроме одного;
в) множество всех чисел, кроме каких-либо двух?

2. При каком значении параметра a областью допустимых значений переменной в выражении $\frac{2x+1}{|x-1|+a}$ является:

а) множество всех чисел;
б) множество всех чисел, кроме одного;
в) множество всех чисел, кроме каких-либо двух?

3. При каких целых значениях a и b дробь $\frac{ax+b}{2x^2-5x+2}$ является сократимой?

4. Найдите все целые значения параметра a, при которых выполняется равенство $\frac{2}{2x-1}+\frac{a}{x+1}=\frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)}$.

5. Найдите все целые значения a и b такие, что $\frac{a}{3x-1}+\frac{b}{2x+1}=\frac{-5x+5}{(3x-1)(2x+1)}$.

6. При каких целых значениях a и b сумма дробей $\frac{a}{3x+1}$ и $\frac{b}{2x-1}$ равна дроби $\frac{x-3}{6x^2-x-1}$?

---

[1] Подборка заданий не является исчерпывающей. Автор будет благодарен всем, кто дополнит эту коллекцию своими заданиями, прислав их по электронной почте по адресу: feoktistov_ie@rambler.ru

7. Найдите натуральные значения m и n, при которых верно равенство $\frac{m}{x+1} + \frac{n}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$.

8. При каких целых значениях n дробь $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}}$ является натуральным числом?

Глава 2. **Целые числа. Делимость чисел**

1. Найдите все значения m, при которых выражение:
а) $x^3 + mx + 3$, где $x \in \boldsymbol{Z}$, кратно 3;
б) $x^2 + mx - 4$, где $x \in \boldsymbol{Z}$, является четным числом.

2. При каких значениях n число $\overline{234n}$ кратно:
а) 2; в) 4; д) 6; ж) 9; и) 11;
б) 3; г) 5; е) 7; з) 10; к) 13?

Глава 3. **Действительные числа. Квадратные корни**

1. При каком значении a объединением промежутков $[-1; 1]$ и $[a; 3]$ будет числовой промежуток?

2. При каком значении a пересечением промежутков $[-1; 1]$ и $[a; 3]$ будет пустое множество?

3. При каких значениях a и b объединением промежутков $[-1; a]$ и $[b; 1]$ будет числовой промежуток?

4. При каких значениях a и b пересечением промежутков $[-1; a]$ и $[b; 1]$ будет отрезок наибольшей длины?

5. При каких целых значениях a и b верно равенство
$\sqrt{a - b\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - 2$?

6. При каких целых значениях a и b верно равенство
$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$?

7. При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{|x| + 1} + 1 = b$ не имеет корней?

8. При каких значениях a верно равенство:
а) $a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$; б) $\sqrt{a^3} = -a\sqrt{a}$?

9. Для каждого значения параметра a решите уравнение:
а) $\sqrt{x^2} = a + 1$; б) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = a + 1$.

10. Постройте график функции $y = f(x)$ и с его помощью выясните, сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $f(x) = a$, если:
а) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2} - 1$; б) $f(x) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 1$.

Глава 4. **Квадратные уравнения**

1. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + a(a+1)x + a + 1 = 0$ является:
а) квадратным; б) неполным квадратным?

2. Для каждого значения a решите уравнение:
а) $ax^2 + (a-1)x = 0$; б) $ax^2 + a - 1 = 0$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 2a - 3 = 0$ имеет один корень?

4. При каких значениях параметра a уравнение $2ax^2 - x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение:
а) $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) = 0$;
б) $x^2 - 5x + a = 0$;
в) $ax^2 + 3x + 2 = 0$.

6. При каких значениях параметра a уравнения $ax^2 - x - 1 = 0$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$ имеют общий корень?

7. При каких значениях параметра q уравнение $x^2 - 6x + q = 0$ имеет корни разных знаков? Определите, корень какого знака имеет большую абсолютную величину.

8. При каких значениях параметра p сумма корней уравнения $x^2 + px - 5 = 0$ равна 5?

9. При каких значениях параметра q произведение корней уравнения $x^2 + 3x + q = 0$ равно -2?

10. При каких значениях параметра b один из корней уравнения $x^2 - (b+5)x + 81 - b^2 = 0$ равен нулю, а второй корень положительный?

11. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2 - 3x + 2a = 0$:
а) имеет только положительные корни;
б) не имеет отрицательных корней?

12. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - a} = 0;$ б) $\dfrac{x^2 - (2a - 1)x + a(a - 1)}{x + 1} = 0.$

Глава 5. **Неравенства**

1. При каких натуральных значениях n справедливо неравенство $\frac{1}{5} < \frac{9}{n} < \frac{1}{4}$?

2. Известно, что $a > b > 0$. При каких значениях c верно неравенство:

а) $ac > bc$; б) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; в) $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$; г) $ac = bc$?

3. Укажите все значения параметра b, при которых для любых значений переменной x справедливо неравенство:

а) $x^2 - 2x + b > 0$; б) $x^2 + \frac{b}{x^2} > 2$.

4. При каких значениях a равносильны неравенства:

а) $ax > 2$ и $x > \frac{2}{a}$; в) $ax < 2$ и $x < \frac{2}{a}$?

б) $ax > 2$ и $x < \frac{2}{a}$;

5. Найдите все значения параметра a, при которых множеством решений неравенства $2x - 1 > a$ является промежуток:

а) $(1; +\infty)$; б) $(1 - a; +\infty)$.

6. При каких значениях a и b неравенство $ax - 2 > b - bx$:

а) не имеет решений; б) верно для любых x?

7. При каких значениях параметра p уравнение $px - 2 = x + 3$ имеет:

а) отрицательный корень;

б) неположительный корень?

8. При каких значениях параметра p уравнение $px + 2 = p + x$ имеет:

а) положительный корень;

б) неотрицательный корень?

9. При каких значениях a неравенство $|2 - |x|| + 2 > a$ справедливо для любых значений x?

10. При каких значениях a неравенство $||x| + 2| + 2 < a$ не имеет решений?

11. Решите неравенство $ab - 1 \leqslant a + b$ относительно переменной:

а) b; б) a.

12. Даны уравнения $x^2 = 2 - a$ и $|x| = a + 1$. При каких значениях a:

а) оба уравнения имеют корни;

б) первое уравнение $x^2 = 2 - a$ имеет корни, а второе — нет;

в) оба уравнения не имеют корней?

13. При каких значениях a система $\begin{cases} 2x + 3 \geqslant x + 1, \\ 2x - a \leqslant 2a - x: \end{cases}$

а) не имеет решений;

б) имеет решением только одну точку;

в) имеет решением отрезок?

14. Для каждого значения параметра a решите систему:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 2x - a > a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 3, \\ 2x - a < a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 2x - a \leqslant a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 1 \leqslant 3, \\ 2x - a \leqslant a. \end{cases}$

15. Для каждого значения a найдите решение совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 3, \\ 2x - a > a; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 \geqslant 3, \\ 2x - a < a; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 \leqslant 3, \\ 2x - a \leqslant a. \end{array}\right.$

16. Для каждого значения a решите неравенство:

а) $x(x - a) > 0$; в) $\dfrac{x - a}{x} < 0$;

б) $x(x - a) \leqslant 0$; г) $\dfrac{x}{x - a} \geqslant 0$.

Глава 6. **Степень с целым показателем**

1. Укажите все целые значения n, при которых значение выражения $2^{2n+2} - 2^{2n+1} - 2^{2n} - 2^{2n-1}$ является дробью.

2. При каких целых значениях k значение выражения $\dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{2^{k+1}} - \dfrac{1}{2^{k+2}} - \dfrac{1}{2^{k+3}}$ является натуральным числом?

3. Пусть $x = a \cdot 10^n$, $y = b \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a < 10$, $1 \leqslant b < 10$, n и m — целые числа. При каких значениях a и b порядок числа:

а) xy не равен $n + m$; б) $\dfrac{x}{y}$ не равен $n - m$?

Глава 7. **Функции и графики**

1. При каких значениях a верно равенство:
а) $a^{-1} < a^{-2}$; б) $a^{-1} > a$?

2. При каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции:
а) $y = x^{-1}$; б) $y = x^{-2}$?

3. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x$. Найдите, при каких значениях a:
а) $f(a - 1) = f(a + 3)$; б) $f(a - 1) - 1 > f(a + 3) + 3$?

4. При каких значениях a и b точка $M(a; b)$ принадлежит как графику функции $f(x) = x^2 - 2x$, так и графику функции $y = -2 \cdot f(x)$?

5. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$. При каких значениях:

а) параметра b график функции $y = -2x + b$ не пересекает график функции $y = f(x)$;
б) параметра k график функции $y = kx - k + 1$ не имеет общих точек с графиком функции $y = f(x)$?

6. Известно, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2 \cdot f(x) = \dfrac{3}{x}$. Найдите $f(x)$.

7. При каких значениях k верно равенство $f(f(x)) = kx$, если $f(x) = \dfrac{k}{x}$?

8. При каких натуральных значениях k график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x + k}{x + 1}$ проходит только через две точки с целочисленными координатами?

9. При каких значениях k график функции $f(x) = \dfrac{kx - k + 2}{x - 1}$ не имеет общих точек с прямой $y + 1 = 0$?

КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Дидактические материалы написаны в соответствии с содержанием учебника Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, И. Е. Феоктистова «Алгебра. 8 класс» (М. : Мнемозина). Каждому параграфу учебника соответствует одна, в некоторых случаях две самостоятельные работы, каждой главе учебника — одна контрольная работа. Все работы рассчитаны на один урок (40—45 минут), за исключением итоговой контрольной работы, рассчитанной на два урока; материал в основном расположен по возрастанию степени трудности (хотя определение уровня сложности носит условный характер).

Самостоятельные работы имеют в большей степени обучающий, чем контролирующий характер. Этому должны, по мнению автора, способствовать еще и основные теоретические сведения, приводимые перед заданиями подготовительного варианта. При выполнении учащимися самостоятельной работы предполагается использование любой справочной литературы (учебник, рабочая тетрадь и др.), в том числе и решенного дома подготовительного варианта.

Теоретические сведения не только помогут учащимся прочнее усвоить основное содержание учебника, но и дадут возможность учителям, работающим по другим учебникам, легче сориентироваться в содержании предлагаемых самостоятельных и контрольных работ.

Некоторые задания самостоятельных работ выходят за рамки указанного учебника, тем не менее весьма близко примыкая и логически продолжая изложенный в книге материал. Поэтому в теоретических сведениях приводятся соответствующие определения, алгоритмы решения задач и минимальные пояснения. Задания вместе с соответствующей теорией целесообразно рассмотреть на уроках, предшествующих проведению самостоятельной работы.

Расширение рамок учебника связано не столько с желанием автора «договорить» теоретический материал до логического завершения, сколько с попыткой хоть немного разгрузить материал 9—11-го классов. Ни для кого не секрет, что в последние десятилетия происходит упрощение школьного курса математики из-за недостатка учебных часов. В то же время задания вступительных экзаменов в вузы не только не упрощаются, но, напротив, становятся сложнее, разнообразнее, изощреннее. Поэтому «ранняя специализация», раннее знакомство с методами решения тех или иных задач становится все более и более актуальным. Тем не менее в случае недостатка времени или по каким-либо другим причинам этот материал можно не рассматривать, а сами задания исключить или заменить.

Количество упражнений самостоятельных и контрольных работ так же, как и их содержание, часто оказывается избыточным. Используемый автором принцип избыточности — это не только попытка охватить в работе как можно больше различных упражнений, «объять необъятное». Здесь присутствует и общая тенденция укрупнения контрольных работ. Кроме того, учителю значительно проще удалить из текста то или иное задание, нежели придумывать недостающее.

Принцип избыточности контрольных и самостоятельных работ имеет и еще одну важную причину. Предполагается, что учитель будет предлагать учащимся *все задания*, но критерий выставления оценки будет таким, чтобы у учащихся одно или, может быть, два упражнения оказались «лишними», дополнительными (выполняются по желанию учащихся за дополнительную отметку). Подобная практика предлагать учащимся выбирать свой «обязательный» минимальный уровень дает возможность ученикам при выполнении работы ответить на вопрос, какой материал они усвоили лучше. Кроме того, дополнительное упражнение в контрольной или самостоятельной работе для сильных учащихся является «запасным парашютом» на случай какой-либо ошибки или описки: учитель вместо упражнения, в котором допущена ошибка, может засчитать дополнительное упражнение.

Наличие дополнительных упражнений и предлагаемая система оценивания контрольных и самостоятельных работ создают благоприятную в психологическом отношении обстановку в классе, что также немаловажно.

Перед началом работы учитель должен объявить (а лучше — записать) критерий оценки и напомнить, что последнее задание — вовсе не самое сложное (в действительности часто так и есть!). Это позволит учащимся сознательно подойти к выбору «собственного обязательного минимума», что, вообще говоря, является серьезной мыслительной работой (оценка своих возможностей и свой собственный выбор — это всегда не просто!). Практика показывает, что дополнительное задание, не являясь обязательным, часто вызывает у учащихся даже больший интерес, нежели задания, проверяющие обязательный уровень знаний, умений и навыков. И здесь следует также предостеречь учащихся: они могут за урок решить лишь два последних, два самых трудных и интересных упражнения, но при этом получат за работу неудовлетворительную отметку, так как не набрали нужное количество баллов.

Несколько слов об оценке за письменную работу в математическом классе. Согласно нормативным документам отметка «удовлетворительно» для учащихся общеобразовательного и для учащихся математического класса должна быть равноценной. На практике этого не происходит. Ученику математического класса для получения «тройки» приходится выполнять значительно больше заданий, причем куда более высокого качества. Ученик в общеобразовательном классе вместо этой «тройки» имел бы в худшем случае «четыре». По мнению автора, «удовлетворительно» должен получить ученик, выполнивший «общеобразовательную» составляющую письменной работы. Однако автор не в состоянии преодолеть сложившиеся за последние 30—40 лет «оценочные ножницы»; «удовлетворительно» в представленных работах получилось несколько выше, чем в работах для общеобразовательных классов.

Контрольные работы имеют контролирующий характер: при их выполнении учащимся нельзя пользоваться никакими справочными материалами, в том числе решенным дома подготовительным вариантом. Несмотря на то что в программе по математике есть темы, связанные с вычислениями на калькуляторе, автор (по целому ряду причин) считает, что использование калькуляторов во время проведения контрольной или самостоятельной работы (как и вообще на уроке математики за редким-редким исключением) нецелесообразно. В этом мнении автора убеждает еще и запрет использовать калькулятор во время вступительных экзаменов в ряде вузов.

Для того чтобы учитель мог правильно расставить некоторые акценты в преподавании алгебры в 8-м классе с углубленным изучением математики, необходимо кратко прокомментировать содержание заданий самостоятельных и контрольных работ.

Самостоятельная работа № 1. Повторение материала 7-го класса с элементами нового. Новым является задание № 4 (в подготовительном варианте — № 3): в таком виде оно в 7-м классе не встречалось, хотя и о разложении на множители, и о решении уравнений разложением на множители говорилось много, было и построение графиков линейных уравнений. Объединение нескольких тем в одном задании может вызвать у учащихся определенные трудности. Поэтому это упражнение следует пояснить во время урока подготовки к самостоятельной работе. Определенные трудности может вызвать и выполнение задания № 2, если учащиеся лишь эпизодически встречались с функциональной символикой. Поэтому на уроках повторения целесообразно этой символике уделить некоторое внимание. Задание № 6 также является относительно новым для учащихся, хотя с формулой квадрата суммы нескольких слагаемых они знакомы. Остальные задания работы вполне традиционны. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 2. Помимо традиционных (даже для общеобразовательного класса) заданий на сокращение дробей (№ 5) и приведение дробей к новому знаменателю (№ 3) в работу включены задания на определение области допустимых значений переменной в дробно-рациональном выражении (№ 1). Кроме того, в работе используется определение равенства дроби нулю (№ 2). Нехарактерным для общеобразовательного класса является задание № 4 (заменить дробь тождественно равной, но с целыми коэффициентами). И уж совсем специфическим для математического класса является задание № 6 (записать множество целых значений переменной, при которых значение дроби является целым или натуральным числом). Это задание — пропедевтика темы «Делимость чисел». Задание № 7 с однородными многочленами уже встречалось в 7-м классе; здесь оно приобретает характер обязательного для учащихся математического класса. Задание № 8 с построением графика линейной функции, на котором выколота одна точка, является характерным именно для классов с углубленным изучением математики и особых сложностей у внимательных учащихся обычно не вызывает. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 3. Первые три задания вполне традиционны (даже для общеобразовательного класса) — их выполнение можно оценить отметкой «3». Все остальные задания — для «математиков». Здесь и поочередное сложение нескольких слагаемых (№ 4), и метод неопределенных коэффициентов (№ 5), и выделение целой части из алгебраической дроби (№ 6), и представление числовой дроби в виде суммы двух различных дробей с однозначными знаменателями. Задание с построением графиков линейных функций, пересекающихся в выколотой точке (№ 8), — продолжение задания № 8 из предыдущей самостоятельной работы. Тут прослеживается пропедевтика решения дробно-рациональных уравнений. Задание на деление многочленов уголком, присутствующее в подготовительном варианте, полезно иметь в виду в связи с выделением целой части алгебраической дроби, однако как отдельное задание в самостоятельной работе оно слишком узко. Следует подробнее пояснить учащимся покоэффициентное равенство многочленов, понятное интуитивно, но никак не разъясненное на страницах учебника. Именно это помогает решить задание с методом неопределенных коэффициентов: два многочлена равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при одинаковых степенях переменной (переменных) равны. Отметка «5» выставляется за семь заданий.

Самостоятельная работа № 4. Характерными для общеобразовательного класса являются упражнения № 1, 2 и 3. В задании № 4 в разложении на множители участвуют степени, не использующиеся в 8-м общеобразовательном классе. Наиболее «страшным» для учащихся оказывается задание № 7, в котором нужно для упрощения выражения для функции использовать разложение на множители группировкой и формулу разложения n-ых степеней. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 5. Традиционно трудная для учащихся тема. Трудность усиливается наличием «четырехэтажных» дробей (№ 2 и 4) и наличием задания с факториалом (№ 5). Наличие в подготовительном варианте софизма (№ 7) — повод отдельного разговора с учащимися. Примеры сложения подобных дробей были и в 7-м классе, и в 8-м. Остается лишь разобраться с бесконечностями... Критерий оценки: «5» — за четыре задания, «3» — за два.

Контрольная работа № 1. В общеобразовательной части работы — задания 1, 2, 5 и, может быть, 7. Остальные задания — для «математиков». Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 6. Все задания самостоятельной работы выходят за рамки программы общеобразовательной школы. Понятию замкнутости множества относительно какой-либо операции посвящено упражнение № 8. Вполне вероятно, что учащимся окажется неизвестным определение круга в координатной плоскости через неравенство, использующееся в задании № 5. Поэтому это упражнение целесообразно рассмотреть на уроке подготовки к самостоятельной работе. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 7. Несмотря на то что в основных сведениях активно используется общепринятое обозначение кратности двух чисел, в заданиях автор постарался его не употреблять, поскольку в учебнике этого обозначения нет. Учитель может ввести эти обозначения, а может и не вводить. Требовать от учащихся обязательного использования этих обозначений не следует. Все задания самостоятельной работы выходят за рамки программы общеобразовательного класса. Наибольшую сложность у учащихся могут вызвать решения уравнений в целых числах (№ 4 б) и № 7). Решение задания № 5 опирается на закономерности, которые можно заметить при возведении в степень чисел 7, 2, 3, 5. Этим закономерностям целесообразно посвятить несколько минут на уроке подготовки к самостоятельной работе. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 8. Все упражнения, кроме № 2, выходят за рамки программы общеобразовательного класса. Наибольшую трудность может вызвать упражнение № 7, которое можно решать как с помощью диафантовых уравнений, так и непосредственно с помощью «арифметики остатков», отсутствующей в тексте учебника и в основных сведениях, предваряющих задания подготовительного варианта. Задание № 6 также удобнее решать с помощью «арифметики остатков», нежели с помощью замены переменной формулой $a = bq + r$ и ее подстановкой в данное выражение. Задание № 8 посвящено основной теореме арифметики. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Контрольная работа № 2. Все задания работы выходят за пределы программы по математике для общеобразовательных классов. Задание № 6 апеллирует к формуле вычисления общего количества различных натуральных делителей числа $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ (здесь p_i — простые числа, n_j — целые неотрицательные числа), вычисляемой по формуле $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \times \times (n_k + 1)$, которую целесообразно вывести без строгого доказательства на уроке подготовки к контрольной работе. Работа содержит большое количество упражнений, о чем следует учащихся предупредить заранее. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 9. Задания № 1, 2, 4 а), 5 и 6 соответствуют заданиям программы по математике для общеобразовательных классов. Основное внимание уделяется двум темам: числовые промежутки и действительные числа. Наибольшую сложность вызывают два последних упражнения. Им целесообразно уделить время при подготовке к самостоятельной работе. Критерий оценки: «5» — за восемь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 10. Для общеобразовательного класса работа окажется знакомой, но технически сложной. Единственное задание, не рассматриваемое в общеобразовательных классах, — это решение иррациональных уравнений. Упражнение с иррациональными уравнениями рассчитано на отработку определения арифметического квадратного корня. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 11. Главное отличие заданий этой работы от аналогичной работы для общеобразовательных классов — наличие доказательств того, что число вида $a + \sqrt{b}$ является иррациональным (доказательство от противного — № 7). Следует обратить внимание учащихся на то, что в доказательстве можно использовать то, что если число b не является точным квадратом какого-либо числа, то оно иррациональное. И еще одно отличие: при закреплении свойств активное использование тождества $\sqrt{a^2} = |a|$, в котором модуль можно раскрыть по-разному исходя из скрытых в условии или записанных в явном виде данных. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 12. Все задания работы превышают программные требования по математике для общеобразовательного класса. Это связано и с формулой сложных радикалов, и с высокой степенью трудности заданий вообще. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Контрольная работа № 3. Все задания работы, за исключением, может быть, упражнения № 2, превышают не только минимальный уровень требований к знаниям и умениям учащихся общеобразовательного класса, но и вообще сложнее программы по математике для общеобразовательных классов. Это и простейшие иррациональные уравнения вместе с преобразованиями выражений с арифметическими корнями — № 1. Это и сложные радикалы вместе с неравенствами — № 3. Здесь и сравнение арифметических корней — № 4. И графики функций, связанных с ограниченностью подкоренных выражений, — № 5. И неравенство Коши (№ 6), и упрощение выражений с радикалами (№ 7). Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 13. К общеобразовательной части можно отнести упражнения № 1 а) — в), 2 а) — в) и 3 а) — б). Остальные задания предназначены для учащихся класса с углубленным изучением математики. Для работы характерно обилие квадратных уравнений с параметром, но до полного исследования (или полного решения квадратного уравнения с параметром) еще далеко — не изучено решение квадратичных неравенств и нет графика квадратичной функции. Критерий оценки: «5» — за шесть упражнений, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 14. Три первых упражнения самостоятельной работы относятся к общеобразовательному уровню. Четвертая задача — на сложные проценты (хотя специально они не изучались и такого названия не вводилось). Пятая задача — интересная связь геометрии и алгебры. Критерий оценки: «5» — за четыре задачи, «3» — за две.

Самостоятельная работа № 15. К общеобразовательной части работы можно отнести упражнения № 1 а) и б), 2 и 3. Упражнение № 5 (разложение на множители квадратного трехчлена) и связанное с ним упражнение № 6 изучаются в 9-м общеобразовательном классе. Единственное задание в этой работе, целиком посвященное математическому классу, — это задание на теорему Виета, связанное с симметрическими многочленами (№ 4). Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 16. Решение дробно-рациональных уравнений традиционно относится к сложным темам. Работа содержит первые три упражнения, которые можно условно отнести к общеобразовательной части (если не учитывать задания к упражнению № 1, предполагающие использование метода решения дробно-рациональных уравнений посредством равносильного перехода к смешанной системе). Критерий оценки: «5» — за пять заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 17. Решение текстовых задач с использованием дробно-рациональных уравнений является одной из наиболее сложных тем курса алгебры 8-го класса. К общеобразовательной части относятся первые два упражнения. Остальные задачи несколько превышают общеобразовательный уровень. Критерий оценки: «5» — за четыре задачи, «3» — за две.

Контрольная работа № 4. К общеобразовательному уровню относятся упражнения № 1, 2 а) и в), 3, 4, 7. Задание № 2 б) (один из корней квадратного уравнения — не число, а параметр) не характерно для общеобразовательных классов. Упражнение № 5 изучается в 9-м общеобразовательном классе. Упражнение № 6 (дробно-рациональное уравнение) усложнилось дополнительным требованием к корням, что также превышает уровень общеобразовательного класса. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 18. К общеобразовательной части работы можно отнести упражнения 1, 2 и 5. Остальные задания либо технически более сложные, либо содержат материал, на котором не акцентируется внимание в общеобразовательном классе. Наиболее сложным является упражнение № 7, и не только потому, что в условии даются отрицательные границы числа. Также достаточно сложным оказывается задание № 3, в котором нужно не забыть об области допустимых значений переменной. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 19. Почти все задания самостоятельной работы можно отнести к общеобразовательному уровню, хотя и не к минимальному обязательному уровню общеобразовательного класса. Исключение составляют лишь упражнение № 7 и из-за наличия функциональной символики упражнение № 6. И, конечно, № 8 на применение неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 20. К общеобразовательной части относятся задания 1—4. Решение неравенства с параметром (№ 5) и исследование системы неравенств с параметром (№ 8) — задания достаточно сложные, но соответствующие содержанию учебника. Упражнение на решение совокупностей неравенств (№ 6) не соответствует содержанию учебника. По желанию учителя это упражнение можно заменить другим, но целесообразнее посвятить ему указанное в планировании время и оставить в работе. Критерий оценки: «5» — за семь упражнений, «3» — за четыре.

Контрольная работа № 5. Упражнения № 1—3 относятся к общеобразовательной части. Упражнения № 4, 5 и 8 (неравенства с модулем) относятся к материалу учебника для 9-го класса, но вполне доступны учащимся этого возраста. Упражнение № 6 (неравенство с параметром) относится к материалу учебника для 8-го класса. Упражнение № 7 содержит решение совокупности, не включенное в учебник для 8-го класса, но также легко решаемое учащимися 8-го класса. Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Самостоятельная работа № 21. Первые четыре задания относятся к общеобразовательной составляющей работы — отработка определения и свойств степени с целым показателем. Может быть, некоторые из этих упражнений несколько сложнее аналогичных заданий с технической точки зрения. Задания на упрощение выражений, содержащих степени с отрицательным показателем, можно считать общеобразовательным компонентом, но относящимся к более позднему сроку обучения в общеобразовательном классе. Нестандартными для обычных школьников являются задания, содержащие степень с неизвестным показателем степени (упрощение выражения и решение уравнения). Отметим, что ученикам очевиден тот факт, что если две степени с одинаковым основанием равны, то показатели этих степеней также равны — это и лежит в основе решения показательных уравнений учащимися этого возраста. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 22. Первые три задания можно отнести к базовому уровню подготовки. Упражнения № 5 и 6 (упрощение выражений) традиционно относятся к достаточно сложным примерам. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Контрольная работа № 6. Задание № 3 не характерно для учебника, и его следует рассмотреть на уроке подробнее. В остальном задания вполне традиционные для темы «Степень с отрицательным показателем». Критерий оценки: «5» — за пять заданий, «3» — за три задания.

Самостоятельная работа № 23. Все задания самостоятельной работы превышают программные требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся 8-го общеобразовательного класса. Задание № 7 не рассматривается в учебнике. Его включение — пропедевтика понятия сложной функции (9-й класс) и одновременно — неожиданный для учащихся «выход» из математического анализа в алгебру (решение систем способом сложения). Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Самостоятельная работа № 24. Несмотря на то что дробно-линейная функция в общеобразовательных классах не рассматривается, упражнения № 1—3 вполне посильны для учащихся этих классов. Остальные задания превышают общеобразовательный уровень. Задание № 6 апеллирует к изученному ранее материалу — делимости чисел. Особое внимание целесообразно уделить при подготовке к самостоятельной работе заданиям на сравнение значений функций $y = x$, $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ (№ 4 и 5). Критерий оценки: «5» — за семь заданий, «3» — за четыре.

Контрольная работа № 7. Все задания работы превышают уровень общеобразовательного класса. Упражнение № 1 — «чтение графика» с элементами материала, не изучавшегося в общеобразовательном классе. В задании к упражнению № 2 — не только вычисление значений функции по данным значениям аргумента и наоборот (как № 3 в самостоятельной работе № 17), но еще и понимание того, что абсцисса и ордината точки — это расстояние до осей ординат и абсцисс соответственно. Упражнение № 3 — «движения» графиков функций. № 4 — не просто построение графиков функций, но и пропедевтика к графическому способу решения уравнений. Задание к упражнению № 5 — пропедевтика доказательств монотонности функций. № 6. Если уравнение оси симметрии параболы у учащихся не вызывает трудностей, то оси симметрии гиперболы — новый для учащихся материал. Однако одного или двух упражнений на эту тему хватает, чтобы учащиеся поняли, о чем идет речь. Критерий оценки: «5» — за шесть заданий, «3» — за три.

Итоговая контрольная работа. К заданиям общеобразовательного уровня можно отнести лишь два последних упражнения. Все остальное — для класса с углубленным изучением математики. На выполнение работы отводится два урока (как минимум, но по возможности работу лучше дать на два часа). Критерий оценки: «5» — за одиннадцать упражнений, «3» — за шесть.

Тесты носят контролирующий характер. Каждый тест содержит 6 заданий, охватывающих лишь основной материал учебника. Для того чтобы исключить возможность угадывания (а заодно и списывания, которое при решении заданий в тестовой форме выполняется значительно легче), учащимся нужно дать контрольное задание, подтверждающее самостоятельность выполнения заданий теста. Номер этого задания учитель должен назвать ученику непосредственно перед сдачей работы на проверку. Естественно, у разных учащихся должны быть разные контрольные номера. Учащихся нужно предупредить, что если они не решили контрольный номер, то за тест ставится оценка «2» (считается, что ученик угадал или списал ответы *всех* заданий, а не только ответ одного контрольного номера). В случае если ученик получил неверный ответ (он, естественно, об этом не знает), он должен привести полное решение. При его наличии этот номер не засчитывается как правильно выполненный, но зато считается, что ученик самостоятельно выполнял все задания теста. Критерий оценки может быть таким: за три и четыре задания — «3», за пять заданий — «4», за шесть заданий — «5». Каждый тест рассчитан на 15—20 минут.

При подготовке контрольных и самостоятельных работ автор черпал идеи, а иногда и сами задания из следующих источников (в порядке их значимости для создания дидактических материалов):

1. *Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И., Феоктистов И. Е.* Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных учреждений. — М. : Мнемозина, 2008.
2. *Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г.* Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса; под ред. Г. В. Дорофеева. — М. : Просвещение, 1996.
3. *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Сурвилло Г. С. и др.* Алгебра : учебное пособие для учащихся 8 класса с углубленным изучением математики; под ред. Н. Я. Виленкина. — М. : Просвещение, 2001.
4. *Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г.* Дидактические материалы по алгебре для 8 класса с углубленным изучением математики. — М. : Просвещение, 1998.
5. *Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я., Козулин Б. В.* Контрольные и проверочные работы по алгебре. 8 класс : методическое пособие. — М. : Дрофа, 2001.
6. *Ершова А. П., Голобородько В. В., Ершова А. С.* Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 8 класса. Разноуровневые дидактические материалы. — Москва—Харьков : Илекса, Гимназия, 1999.
7. *Зив Б. Г., Гольдич В. А.* Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. — СПб. : ЧеРо-на-Неве, 2002.
8. *Жохов В. И., Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г.* Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. — М. : Просвещение, 1999.
9. *Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н.* Задания для подготовки к письменному экзамену по математике в 9 классе. Пособие для учителя. — М. : Просвещение, 1999.
10. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре для 8—9 классов : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. — М. : Просвещение, 1992.
11. *Звавич Л. И., Рязановский А. Р.* Алгебра. 8 класс. Задачник для классов с углубленным изучением математики. — М. : Мнемозина, 2002.
12. *Кузнецова Л. В., Бунимович Е. А., Пигарев Б. П., Суворова С. Б.* Алгебра. 9 класс. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. — М. : Дрофа, 2004.

ПРИМЕРНОЕ ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

5 часов в неделю, всего 170 часов

Несколько слов о приведенном ниже планировании. Прежде всего: планирование рассчитано на 5 учебных часов в неделю. Именно такое количество уроков было в восьмых математических классах до реформ и модернизации последних лет. По мнению автора, о меньшем количестве часов в неделю для класса *с углубленным изучением математики* говорить нельзя. В противном случае учителю необходимо убедить администрацию школы выделить на изучение математики дополнительные часы из школьного компонента или, в крайнем случае, добавить факультативные часы. Так или иначе, автор считает нецелесообразным преподавание математики по данному учебнику с меньшим количеством часов, и поэтому альтернативного планирования здесь не приводится.

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
	Повторение материала 7-го класса (6 ч)	
1	Многочлены, действия с многочленами, формулы сокращенного умножения	1
2	Разложение на множители: вынесение за скобку, группировка	1
3	Уравнения, решение уравнений разложением на множители	1
4	Функции и их графики. Уравнение с двумя переменными и их графики	1
5	Системы линейный уравнений и методы их решения	1
6	*Самостоятельная работа № 1* (повторение)	1
	Глава 1. Дроби (23 ч)	
	§ 1. Дроби и их свойства (5 ч)	
7, 8	Числовые дроби и дроби, содержащие переменные (п. 1)	2
9, 10	Свойства дробей (п. 2)	2
11	*Самостоятельная работа № 2* (§ 1)	1
	§ 2. Сумма и разность дробей (6 ч)	
12—14	Сложение и вычитание дробей (п. 3)	3
15, 16	Представление дроби в виде суммы дробей (п. 4)	2
17	*Самостоятельная работа № 3* (§ 2)	1
	§ 3. Произведение и частное дробей (12 ч)	
18, 19	Умножение дробей. Возведение дроби в степень (п. 5)	2
20, 21	Деление дробей (п. 6)	2
22	*Самостоятельная работа № 4* (§ 3)	1
23—25	Преобразование рациональных выражений (п. 7)	3
26	*Самостоятельная работа № 5* (§ 3)	1

Продолжение таблицы

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
27, 28	Решение дополнительных упражнений к главе 1	2
29	*Контрольная работа № 1* (глава 1)	1
Глава 2. Целые числа. Делимость чисел (19 ч)		
§ 4. Множество натуральных и множество целых чисел (5 ч)		
30, 31	Пересечение и объединение множеств (п. 8)	2
32	Взаимно однозначное соответствие (п. 9)	1
33	Натуральные числа. Целые числа (п. 10)	1
34	*Самостоятельная работа № 6* (§ 4)	1
§ 5. Делимость чисел (14 ч)		
35	Свойства делимости (п. 11)	1
36, 37	Делимость суммы и произведения (п. 12)	2
38	*Самостоятельная работа № 7* (§ 5)	1
39, 40	Деление с остатком (п. 13)	2
41, 42	Признаки делимости (п. 14)	2
43, 44	Простые и составные числа (п. 15)	2
45	*Самостоятельная работа № 8* (§ 5)	1
46, 47	Решение дополнительных упражнений к главе 2	2
48	*Контрольная работа № 2* (глава 2)	1
Глава 3. Действительные числа. Квадратный корень (29 ч)		
§ 6. Множество рациональных и множество действительных чисел (10 ч)		
49, 50	Рациональные числа (п. 16)	2
51, 52	Действительные числа (п. 17)	2
53, 54	Числовые промежутки (п. 18)	2
55	Интервальный ряд данных (п. 19)	1
56, 57	Абсолютная и относительная погрешность (п. 20)	2
58	*Самостоятельная работа № 9* (§ 6)	1
§ 7. Арифметический квадратный корень. Функция $y = \sqrt{x}$ (6 ч)		
59, 60	Арифметический квадратный корень (п. 21)	2
61, 62	Вычисление и оценка значений квадратных корней (п. 22)	2
63	Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график (п. 23)	1
64	*Самостоятельная работа № 10* (§ 7)	1
§ 8. Свойства арифметического квадратного корня (13 ч)		
65—67	Квадратный корень из произведения, дроби и степени (п. 24)	3
68—70	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни (п. 25)	3
71	*Самостоятельная работа № 11* (§ 8)	1
72, 73	Преобразование двойных радикалов (п. 26)	2
74	*Самостоятельная работа № 12* (§ 8)	1

Продолжение таблицы

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
75, 76	Решение дополнительных упражнений к главе 3	2
77	*Контрольная работа № 3* (глава 3)	1
	Глава 4. Квадратные уравнения (32 ч)	
	§ 9. Квадратное уравнение и его корни (13 ч)	
78, 79	Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения (п. 27)	2
80—83	Формулы корней квадратного уравнения (п. 28)	4
84	*Самостоятельная работа № 13* (§ 9)	1
85, 86	Уравнения, сводящиеся к квадратным (п. 29)	2
87—89	Решение задач с помощью квадратных уравнений (п. 30)	3
90	*Самостоятельная работа № 14* (§ 9)	1
	§ 10. Свойства корней квадратного уравнения (8 ч)	
91—93	Теорема Виета (п. 31)	3
94, 95	Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения (п. 32)	2
96, 97	Разложение квадратного трехчлена (п. 33)	2
98	*Самостоятельная работа № 15* (§ 10)	1
	§ 11. Дробно-рациональные уравнения (11 ч)	
99—101	Решение дробно-рациональных уравнений (п. 34)	3
102	*Самостоятельная работа № 16* (§ 11)	1
103—105	Решение задач с помощью уравнений (п. 35)	3
106	*Самостоятельная работа № 17* (§ 11)	1
107, 108	Решение дополнительных упражнений к главе 4	2
109	*Контрольная работа № 4* (глава 4)	1
	Глава 5. Неравенства (21 ч)	
	§ 12. Числовые неравенства и неравенства с переменными (8 ч)	
110	Сравнение чисел (п. 36)	1
111, 112	Свойства числовых неравенств (п. 37)	2
113, 114	Оценка значений выражений (п. 38)	2
115, 116	Доказательство неравенств (п. 39)	2
117	*Самостоятельная работа № 18* (§ 12)	1
	§ 13. Решение неравенств с одной переменной и их систем (13 ч)	
118—120	Решение неравенств с одной переменной (п. 40)	3
121	*Самостоятельная работа № 19* (§ 13)	1
122—124	Решение систем неравенств с одной переменной (п. 41)	3
125, 126	Решение простейших неравенств с модулем (п. 42)	2
127	*Самостоятельная работа № 20* (§ 13)	1

Окончание таблицы

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
128, 129	Решение дополнительных упражнений к главе 5	2
130	*Контрольная работа № 5* (глава 5)	1
	Глава 6. Степень с целым показателем (12 ч)	
	§ 14. Степень с целым показателем и ее свойства (5 ч)	
131, 132	Определение степени с целым отрицательным показателем (п. 43)	2
133, 134	Свойства степени с целым показателем (п. 44)	2
135	*Самостоятельная работа № 21* (§ 14)	1
	§ 15. Выражения, содержащие степени с целыми показателями (7 ч)	
136, 137	Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями (п. 45)	2
138	Стандартный вид числа (п. 46)	1
139	*Самостоятельная работа № 22* (§ 15)	1
140, 141	Решение дополнительных упражнений к главе 2	2
142	*Контрольная работа № 6* (глава 6)	1
	Глава 7. Функции и графики (17 ч)	
	§ 16. Преобразование графиков функций (6 ч)	
143, 144	Функция, область определения и область значений функции (п. 47)	2
145	Растяжение и сжатие графиков (п. 48)	1
146, 147	Параллельный перенос графиков функций (п. 49)	2
148	*Самостоятельная работа № 23* (§ 16)	1
	§ 17. Свойства и графики некоторых функций (11 ч)	
149, 150	Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ (п. 50)	2
151, 152	Обратная пропорциональность и ее график (п. 51)	2
153—155	Дробно-линейная функция и ее график (п. 52)	3
156	*Самостоятельная работа № 24* (§ 17)	1
157, 158	Решение дополнительных упражнений к главе 7	2
159	*Контрольная работа № 7* (глава 7)	1
	Итоговое повторение (11 ч)	
160, 161	Преобразование рациональных выражений (глава 1)	2
162	Делимость целых чисел (глава 2)	1
163	Арифметические квадратные корни (глава 3)	1
164	Квадратные уравнения (глава 4)	1
165	Дробно-рациональные уравнения (глава 4)	1
166	Неравенства и их системы (глава 5)	1
167	Степень с целым показателем (глава 6)	1
168	Функции и их графики (глава 7)	1
169, 170	*Итоговая контрольная работа*	2

ОТВЕТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Самостоятельная работа № 1

Подготовительный вариант. **1.** (1; −1). **2.** 5. **3.** Прямые $y = x$ и $x = 1$. **4.** а) 1; б) 16; в) 216. **5.** $(x^2 - 3)(x^2 + 1)$. **6.** 15. **7.** $(a + b)^3 - (a - b)^3$. Вариант 1. **1.** (−2; 0,5). **2.** −15. **3.** а) 1; б) 4. **4.** Прямые $y = x$ и $y = -2$. **5.** $-1\frac{7}{8}$. **6.** 40. **7.** 0. Вариант 2. **1.** (−0,5; 2). **2.** 2. **3.** а) 1; б) 9. **4.** Прямые $y = -x$ и $y = 2$. **5.** $1\frac{7}{8}$. **6.** 14. **7.** 0. Вариант 3. **1.** (3; −2). **2.** 10. **3.** а) $\frac{3}{8}$; б) 9. **4.** Прямые $y = 2x$ и $x = -1$. **5.** 10. **6.** 4. **7.** $2a^3 - 2ab^2$.

Самостоятельная работа № 2

Подготовительный вариант. **1.** а) 3 и −3; б) 2,5 и −2,5. **2.** а) Все числа; б) все числа, кроме −2,5. **3.** а) 0; б) не существует. **4.** а) $\frac{-a}{2 - x}$; б) $\frac{0{,}5a}{0{,}5x - 1}$; в) $\frac{-2a - ax}{4 - x^2}$; г) $\frac{ax - 2a}{(x - 2)^2}$; д) $\frac{ax^2 + 2ax + 4a}{x^3 - 8}$. **5.** $\frac{3x^2 - 4x + 12}{6x^3 + 10x}$. **6.** а) $\frac{x}{3y}$; б) $-1{,}5x$; в) $\frac{4 - x}{x + 4}$; г) $\frac{a - 3b}{2}$; д) $\frac{1}{2}$. **7.** а) {0; 10}; б) {−5; −2; −1; 2}. **8.** 6,5. **9.** Прямая $y = -x - 2$ с выколотой точкой (2; −4). Вариант 1. **1.** а) 2 и −2; б) 3 и −3. **2.** а) При $x = 0$; б) не существует. **3.** а) $\frac{-a}{x - 1}$; б) $\frac{a + ax}{1 - x^2}$; в) $\frac{a - ax}{(1 - x)^2}$; г) $\frac{-ax^2 - ax - a}{x^3 - 1}$. **4.** $\frac{5x - 4}{5x^2 + 10x + 6}$. **5.** а) $\frac{3y}{2x}$; б) $-x$; в) $\frac{2x - 1}{2x + 1}$; г) $-(m^2 + 2mn + 4n^2)$; д) $\frac{1}{2(x - 2)}$. **6.** а) {2; 14}; б) {−2; 0; 1; 3}. **7.** $\frac{1}{7}$. **8.** Прямая $y = 2 - x$ с выколотой точкой (2; 0). Вариант 2. **1.** а) 4 и −4; б) 1 и −1. **2.** а) При $x = 0$; б) не существует. **3.** а) $\frac{-a}{x - 3}$; б) $\frac{3a + ax}{9 - x^2}$; в) $\frac{3a - ax}{(3 - x)^2}$; г) $\frac{-ax^2 - 3ax - 9a}{x^3 - 27}$. **4.** $\frac{4x^2 + 5}{5x^2 - 20x + 12}$. **5.** а) $\frac{3x}{4y}$; б) $-x$; в) $\frac{2x + 1}{2x - 1}$; г) $m^2 - 2mn + 4n^2$; д) $\frac{2}{x + 2}$. **6.** а) {−1; 15}; б) {−6; −1; 0; 5}. **7.** 2. **8.** Прямая $y = 2 - x$ с выколотой точкой (2; 0). Вариант 3. **1.** а) 10 и −4; б) 2,5 и −2,5. **2.** а) При $x = 1$; б) не существует. **3.** а) $\frac{2a}{2x + 2}$;

б) $\frac{ax-a}{x^2-1}$; в) $\frac{2ax+2a}{2(x+1)^2}$; г) $\frac{ax^2-ax}{x^3-x}$. **4.** $\frac{4x-5}{10x^2+5x-14}$. **5.** а) $\frac{4x^2}{3y}$; б) $-x$; в) $\frac{2x-1}{2x+1}$; г) $-m^2-2mn-4n^2$; д) $\frac{1}{2x-4}$. **6.** а) {2; 14}; б) {−2; 0; 1; 3}. **7.** 4. **8.** Прямая $y = 2 - x$ с выколотой точкой (2; 0).

Самостоятельная работа № 3

Подготовительный вариант. **1.** а) $\frac{c+1}{c-1}$; б) $\frac{c+3}{c-1}$; в) $\frac{4}{c-1}$. **2.** Выражение равно 1. **3.** а) $\frac{x+3}{x}$; б) $\frac{4a+4}{a(4-a^2)}$; в) $\frac{2x^2+6x}{x-3}$. **4.** а) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+5}$; б) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}$. **5.** а) x^2-x-1; б) $3x^2-x-1$. **6.** а) $n = 1$, $n = 5$; б) $n = 2$, $n = 3$. **7.** Например, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$. **8.** $\alpha(x) = 2x - 1$, $x \neq 2$. Вариант 1. **1.** а) 2; б) $\frac{a+3}{2a-1}$; в) $\frac{1}{y-2}$. **2.** Выражение равно 1. **3.** а) $\frac{2}{3x}$; б) $\frac{2x+1}{x(1-x^2)}$; в) $\frac{2x}{x-1}$. **4.** $\frac{4}{x^2-4}$. **5.** а) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$; б) $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-1}$. **6.** а) $n = 2$; б) $n = 2$. **7.** Например, $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$. **8.** $f(x) = -x - 3$, $x \neq 2$. Вариант 2. **1.** а) 1; б) $\frac{2x+3}{2x-1}$; в) $\frac{1}{y-3}$. **2.** Выражение равно 1. **3.** а) $\frac{2}{3x}$; б) $\frac{2x^2-3x+2}{x(x^2-1)}$; в) $-\frac{2x}{x+1}$. **4.** $\frac{4}{(x-1)(x+3)}$. **5.** а) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}$; б) $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+1}$. **6.** а) $n = 3$; б) $n = 2$. **7.** Например, $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$. **8.** $f(x) = -x + 3$, $x \neq -2$. Вариант 3. **1.** а) −1; б) $\frac{x+1}{1-x}$; в) $\frac{1}{2x-3}$. **2.** Выражение равно 1. **3.** а) $\frac{x+1}{x}$; б) $\frac{1}{x(1+x)}$; в) $\frac{x^2+6x}{x-2}$. **4.** $\frac{100}{x(x+100)}$. **5.** а) $\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{x-3}$; б) $\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x+3}$. **6.** а) $n=1$, $n = 3$; б) $n = 2$. **7.** Например, $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}$. **8.** $f(x) = x - 3$, $x \neq -1$.

Самостоятельная работа № 4

Подготовительный вариант. **1.** а) $\frac{9}{2a^2x}$; б) $\frac{5(x+2y)}{x(x-2y)}$; в) $\frac{y}{10a^2}$; г) $\frac{3ax}{7y^2}$. **2.** $-\frac{1}{18}$. **3.** $-\frac{4}{3}$. **4.** $\frac{8}{3(x+2)}$. **5.** При $x = 1$. **6.** $x+2+\frac{5}{x-3}$. **7.** $f(x) = 2x$, $x \neq -1$, $f(x) \neq -2$. Вариант 1. **1.** а) $\frac{3}{20ab}$; б) $\frac{4(2x-3y)}{3y(2x+3y)}$;

в) $\frac{1}{12ay}$; г) $\frac{4a^2}{3xy}$. **2.** -1. **3.** $-\frac{2}{3}$. **4.** $\frac{x+2}{6}$. **5.** Не существует. **6.** $x + 3 + \frac{5}{x-2}$. **7.** $f(x) = 2x$, $x \neq 1$, $f(x) \neq 2$. Вариант 2. **1.** а) $\frac{a}{x}$; б) $\frac{6(2x-y)}{x(2x+y)}$; в) $\frac{4x}{9a^3y^2}$; г) $\frac{2a^2x}{5y}$. **2.** 1. **3.** $-1{,}5$. **4.** $-\frac{x+3}{6}$. **5.** При $x = -1$. **6.** $x - 1 + \frac{1}{x+2}$. **7.** $f(x) = 2x$, $x \neq -1$, $f(x) \neq -2$. Вариант 3. **1.** а) $\frac{3a}{5b}$; б) $\frac{4y^2(2x+y)}{3(2x-y)}$; в) $\frac{2}{15axy}$; г) $\frac{9a}{2y}$. **2.** $-0{,}7$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $-\frac{1}{6x-2}$. **5.** При $x = -1$; 3. **6.** $x - 2$. **7.** $f(x) = -2x$, $x \neq 1$, $f(x) \neq -2$.

Самостоятельная работа № 5

Подготовительный вариант. **1.** а) $\frac{3x+y}{x}$; б) $\frac{b^2}{b-2a}$; в) $\frac{3}{2x-1}$. **2.** $-\frac{1}{t}$. **3.** $\frac{a+b}{2}$. **4.** -2. **5.** При $n = 6$. **6.** $-(b-1)^2$. Вариант 1. **1.** а) $-2x + 1$; б) 0,5; в) $\frac{2-10x}{3x-1}$. **2.** $2 - a$, $a \neq 0$, $a \neq 2$. **3.** $\frac{1}{2b+1}$. **4.** -2. **5.** При $n = 2$, $n = 9$. Вариант 2. **1.** а) $4x + 4$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{11-10x}{2x+3}$. **2.** $\frac{1}{3-c}$, $c \neq 0$, $c \neq 3$. **3.** $-\frac{1}{a}$. **4.** 10. **5.** При $n = 5$. Вариант 3. **1.** а) $x^2 - 4x + 4$; б) -2; в) $\frac{9x+1}{2x-1}$. **2.** $2a - 1$; $a \neq 0$, $a \neq 0{,}5$. **3.** -1. **4.** 1. **5.** При $n = 1$ и $n = 5$.

Самостоятельная работа № 6

Подготовительный вариант. **1.** $A \cap B = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $A \cup B = \{x \mid x = 2n$ или $x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. **3.** 8 учащихся. **4.** $\frac{2x^2 + 3xy - 2y^2}{2xy - y^2} = \frac{x+2y}{y} = \frac{x}{y} + 2$. **5.** Хорда окружности. **7.** а) -1; 1; 2; 4; б) 2; 4. **8.** а) M замкнуто, K не замкнуто; б) M и K замкнуты. Вариант 1. **1.** $A \cap B = \{x \mid x = 10n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $A \cup B = \{x \mid x = 2n$ или $x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. **3.** 9 учащихся. **4.** $\frac{3x^2 + 4xy - 4y^2}{3x^2 - 2xy} = 1 - 2 \cdot \frac{y}{x}$. **7.** а) -5; -2; -1; 2; б) -1; 2. **8.** а) M замкнуто, K не замкнуто; б) M и K замкнуты. Вариант 2. **1.** $A \cap B = \{x \mid x = 14n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $A \cup B = \{x \mid x = 2n$ или $x = 7n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. **3.** 5 учащихся. **4.** $\frac{2x^2 - 7xy + 6y^2}{2xy - 3y^2} = \frac{x}{y} - 2$. **7.** а) -1; 1; 2; 4; б) 2; 4. **8.** а) M замкнуто,

K не замкнуто; б) M и K замкнуты. Вариант 3. **1.** $A \cap B = B$, $A \cup B = A$. **3.** 25 хозяйств. **4.** $\left(\frac{x}{y} - 2\right) \in \mathbf{Z}$. **7.** а) -1; 3; 5; 9; б) 3. **8.** а) Замкнуто; б) не замкнуто.

Самостоятельная работа № 7

Подготовительный вариант. **1.** а) $7n^3 - 28n^2$; $7n + 21$; б) $14n + 2$; $7n - 6$; в) $2n + 7$, при $n = 7k$, где $k \in \mathbf{Z}$. **2.** а) $2^{18}(2^3 - 1) \vdots 7$; б) $3^{12}(3^2 + 1) \vdots 30$; в) $2^{21}(2^4 + 2^5 - 1) \vdots 47$. **3.** а) $(8 - 1)(8^6 + 8^5 + \dots + 8 + 1) \vdots 7$; б) $(8 + 1)(8^6 - 8^5 + \dots - 8 + 1) \vdots 9 \vdots 3$. **4.** а) (1; 7), ($-1$; -7), (7; 1), (-7; -1); б) (3; 8), (9; 2), (1; -6), (-5; 0). **5.** Последняя цифра степени $7^{4n} = 49^{2n}$ равна 1. **7.** Левая часть уравнения делится на 5, а правая — не делится. **9.** 7^{333} оканчивается цифрой 7, 3^{777} — цифрой 3, а их сумма — нулем. Вариант 1. **1.** а) $3n - 12n^2$; $15n + 12$; б) $3n + 1$; в) $2n + 21$, $9n^2 - 2n$, при $n = 3k$, где $k \in \mathbf{Z}$. **2.** а) $2^{18}(2^3 + 1) \vdots 9$; б) $3^{12}(3^2 - 1) \vdots 8$; в) $2^{18} \cdot 40 \vdots 40$. **3.** а) $(5 - 1)(5^6 + \dots + 5 + 1) \vdots 4$; б) $(5 + 1)(5^6 - 5^5 + \dots - 5 + 1) \vdots 6 \vdots 3$. **4.** а) (1; 3), ($-1$; -3), (3; 1), (-3; -1); б) (2; 6), (4; 4), (0; 0), (-2; 2). **5.** Последняя цифра степени 7^{49} равна 7, последняя цифра степени 2^{35} равна 8, следовательно, числитель оканчивается на цифру 5. **7.** Левая часть уравнения делится на 3, а правая — не делится. Вариант 2. 1. а) $5n^2 - 35n$; $10n + 65$; б) $5n + 3$; в) $3n + 25$, $9n^2 - 15n$, при $n = 5k$, где $k \in \mathbf{Z}$. **2.** а) $2^9 \cdot 31$; б) $3^{15}(27 + 1) \vdots (3 \cdot 28)$; в) $2^{21} \cdot 3 \vdots 48$. **3.** а) $(7 - 1)(7^4 + \dots + 7 + 1) \vdots 6$; б) $(7 + 1)(7^4 - 7^3 + 7^2 - 7 + 1) \vdots 8 \vdots 4$. **4.** а) (1; 5), ($-1$; -5), (5; 1), (-5; -1); б) (10; 2), (6; 6), (0; 0), (4; -4). **5.** Последняя цифра степени 7^{53} равна 7, последняя цифра степени 2^{25} равна 2, следовательно, числитель оканчивается на цифру 5. **7.** Левая часть уравнения делится на 7, а правая — не делится. Вариант 3. 1. а) $11n - 121n^2$; $55n + 11$; б) $22n + 21$; в) $10n + 121$, $11n^2 - 2n$, при $n = 11k$, где $k \in \mathbf{Z}$. **2.** а) $2^{21} \cdot 3 \vdots 3$; б) $5^6 \cdot 6 \vdots 30$; в) $3^{16} \cdot 19 \vdots 57$. **3.** а) $(13 - 1)(13^{12} + \dots + 13 + 1) \vdots 3$; б) $(13 + 1)(13^{12} - 13^{11} + \dots - 13 + 1) \vdots 14 \vdots 7$. **4.** а) (1; 2), ($-1$; -2), (2; 1), (-2; -1); б) (4; 2), (0; 0), (3; 3), (1; -1). **5.** Последняя цифра степени 7^{53} равна 7, последняя цифра степени 2^{37} равна 2, следовательно, числитель оканчивается на цифру 5. **7.** Левая часть уравнения делится на 11, а правая — не делится.

Самостоятельная работа № 8

Подготовительный вариант. **1.** $157 \equiv (-20)(\mathrm{mod}\ 3)$. **2.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 2; 5; 8; в) 0; 5; г) 2; д) 2; 6; е) 3. **3.** 2. **4.** 3. **5.** а) 96; б) 84. **6.** 2. **7.** 7. **8.** 25, 50, 22, 75, 33, 55, 275, 30, 150, 66, 165, 110, 825, 550, 330, 1650 конфет; 16 способов. **9.** 13, 17 и 19 лет. Вариант 1. **1.** $752 \equiv (-52)(\mathrm{mod}\ 3)$. **2.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 0; 3; 6; 9; в) 0; 5; г) 0; 9; д) 2; 6; е) 3. **3.** 4. **4.** 2. **5.** 38. **6.** 0. **7.** 11. **8.** 48. Вариант 2. **1.** $275 \equiv (-73)(\mathrm{mod}\ 3)$. **2.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 2; 5; 8; в) 0; 5; г) 2; д) 0; 4; 8; е) 5. **3.** 2. **4.** 6. **5.** 42. **6.** 2. **7.** 14. **8.** 36. Вариант 3. **1.** $-117 \equiv (-352)(\mathrm{mod}\ 5)$. **2.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 0; 3; 6; 9; в) 0; 5; г) 3; д) 2; 6; е) 8. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 34. **6.** 14. **7.** 16. **8.** 18.

Самостоятельная работа № 9

Подготовительный вариант. **2.** а) 6; б) 7; в) 7; г) не существует. **3.** а) 0,9(1); б) 0,(63). **4.** а) −4,(923076); б) $2\frac{103}{330}$. **5.** а) [0; 3]; б) (−7; 5]; в) ∅. **6.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) невозможно записать в виде промежутка. **9.** а) Например, $q = 0{,}177$; б) например, $p = 0{,}177010010001...$. Вариант 1. **2.** а) 1; б) 2; в) 2; г) не существует. **3.** а) 2,1(3); б) 1,5(28). **4.** а) −1,8(3); б) $\frac{47}{330}$. **5.** а) [−1; 1]; б) (−1; 11]; в) ∅. **6.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) невозможно записать в виде промежутка. **9.** а) Например, $q = \frac{2}{7}$; б) например, $p = 0{,}242242224...$. Вариант 2. **2.** а) 4; б) 5; в) 5; г) не существует. **3.** а) 3,1(4); б) 2,3(24). **4.** а) −2,1(6); б) $\frac{41}{110}$. **5.** а) [−3; 2]; б) (−2; 3]; в) ∅. **6.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) невозможно записать в виде промежутка. **9.** а) Например, $q = \frac{7}{36}$; б) например, $p = 1{,}20220222...$. Вариант 3. **2.** а) −6; б) −2; в) не существует; г) 0. **3.** а) 2,20(4); б) −1,3(34). **4.** а) 1,(18); б) $\frac{67}{165}$. **5.** а) [−1; 1]; б) $\left(1; \frac{\pi}{3}\right]$; в) ∅. **6.** а) $\left(-\infty; \frac{\pi}{3}\right]$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $\boldsymbol{R}$. **9.** а) Например, $q = \frac{5}{22}$; б) например, $p = 1{,}2202220...$.

Самостоятельная работа № 10

Подготовительный вариант. **1.** а) 6; б) −28; в) 0,2. **2.** а) ±5; б) $\pm\sqrt{3}$; в) ∅; г) $\pm\sqrt{7{,}5}$. **3.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$. **4.** 3, 4, 5 и 6. **5.** (1; 1) и (4; 2). **6.** $\sqrt{\frac{4}{33}}$, $\sqrt{0{,}1}$, $\frac{1}{4}$, 0,2, $\left(-\sqrt{0{,}17}\right)^2$. **7.** а) 0,0169; б) ∅; в) 8; г) 1. Вариант 1. **1.** а) 6; б) −75; в) 2,5. **2.** а) ±1,5; б) $\pm\sqrt{6}$; в) ∅; г) $\pm\sqrt{10{,}5}$. **3.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$. **4.** 9 и 10. **5.** (1; 1). **6.** $\sqrt{0{,}2}$, $\sqrt{\frac{3}{37}}$, $\left(-\sqrt{0{,}21}\right)^2$, $\frac{1}{5}$, 0,18. **7.** а) 0,0289; б) ∅; в) −3; г) 1. Вариант 2. **1.** а) 20; б) −80; в) $\frac{1}{3}$. **2.** а) ±1,4; б) $\pm\sqrt{6}$; в) ∅; г) $\pm\sqrt{6}$. **3.** а) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$. **4.** 7, 8 и 9. **5.** (4; 2). **6.** $\sqrt{0{,}5}$, 0,7, $\sqrt{\frac{13}{29}}$, $\frac{1}{2}$, $\left(-\sqrt{0{,}47}\right)^2$. **7.** а) 0,0256; б) ∅; в) −13; г) 1. Вариант 3. **1.** а) 0,7; б) −1,8; в) $4\frac{1}{3}$. **2.** а) ±1,9; б) $\pm\sqrt{1{,}2}$; в) ∅; г) $\pm\sqrt{\frac{29}{8}}$. **3.** а) $(-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$;

б) $(-\infty; 0)$. **4.** 13 и 14. **5.** $(1; 1)$. **6.** $0{,}7$, $\sqrt{0{,}5}$, $\frac{3}{4}$, $\left(-\sqrt{0{,}8}\right)^2$, $\sqrt{0{,}7}$. **7.** а) $-0{,}0121$; б) $\varnothing$; в) $-0{,}9$; г) 2.

Самостоятельная работа № 11

Подготовительный вариант. **1.** 9,5. **2.** а) $11\sqrt{2}$; б) $-a\sqrt{-a}$; в) $-b\sqrt{2a}$; г) $|b| \cdot \sqrt{3ab}$. **3.** а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{2a^3}$; в) $\sqrt{-9a^3}$; г) $-\sqrt{a}$. **4.** а) $2\sqrt{7}$; б) $6 + 2\sqrt{7}$; в) $\sqrt{10} + \sqrt{7}$. **5.** $2b - 3a$. **6.** $b = 6$. Вариант 1. **1.** $3\frac{3}{70}$. **2.** а) $9\sqrt{2}$; б) $a^2 \cdot \sqrt{-2a}$; в) $-2a\sqrt{b}$; г) $|3a| \cdot \sqrt{-ab}$. **3.** а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{3a^{11}}$; в) $\sqrt{-0{,}5a^3}$; г) $-\sqrt{a^3}$. **4.** а) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; в) $\sqrt{14} + 2$. **5.** $b - 5a$. **6.** $b = 6$. Вариант 2. **1.** 17,5. **2.** а) $7\sqrt{3}$; б) $a^2 \cdot \sqrt{-3a}$; в) $-3a\sqrt{b}$; г) $|0{,}3b| \cdot \sqrt{-ab}$. **3.** а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{5a^7}$; в) $\sqrt{-12a^5}$; г) $-\sqrt{a^{-1}}$. **4.** а) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; в) $7 - \sqrt{14}$. **5.** $a - 4b$. **6.** $b = 6$. Вариант 3. **1.** 3,25. **2.** а) $5\sqrt{13}$; б) $-a\sqrt{-5a}$; в) $-2b\sqrt{3a}$; г) $|0{,}5a| \cdot \sqrt{7ab}$. **3.** а) $\sqrt{0{,}5}$; б) $\sqrt{a^5}$; в) $\sqrt{-5a^3}$; г) $-\sqrt{-a^7}$. **4.** а) $0{,}5\sqrt{10}$; б) $3 + 2\sqrt{3}$; в) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$. **5.** $2a + b$. **6.** $b = -2\sqrt{5}$.

Самостоятельная работа № 12

Подготовительный вариант. **1.** 2. **2.** Меньше. **4.** а) 1,5; б) 4. **5.** а) $-\frac{1}{2+2\sqrt{2}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{10}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}$. **6.** а) 5; б) $4\sqrt{3}$. **7.** $\frac{a^2}{4a^2-4x}$. Вариант 1. **1.** 8. **2.** Меньше. **4.** а) 5; б) 5. **5.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{15}{2\sqrt{15}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)}$. **6.** а) 3; б) $4\sqrt{7}$. **7.** $\frac{x}{x-\sqrt{2}}$. Вариант 2. **1.** 10. **2.** Больше. **4.** а) 7; б) -3. **5.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$; б) $\frac{7}{\sqrt{21}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}$. **6.** а) 2; б) $6\sqrt{5}$. **7.** $\frac{x}{x+\sqrt{3}}$. Вариант 3. **1.** -4. **2.** Меньше. **4.** а) -1; б) 1. **5.** а) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{15}{\sqrt{30}\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)}$. **6.** а) 3; б) 4.

Самостоятельная работа № 13

Подготовительный вариант. **1.** а) 0; 2,4; б) $\pm\sqrt{2{,}4}$; в) $\varnothing$; г) при $a = 1{,}5$ $x = 0$, при $a \neq 1{,}5$ $x = 0$ и $x = \frac{3-2a}{5}$. **2.** а) $\varnothing$; б) 1 и $\frac{4}{3}$; в) 2 и $\frac{1}{3}$; г) -3

и $-p$. **3.** а) 2 и $\frac{8}{3}$; б) 1 и $\frac{101}{3}$; в) -6 и $2a$. **4.** а) При $a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) при $a = 2$. **5.** а) $\frac{9}{20}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{7}{8}$. **6.** а) $\varnothing$; б) 1; $-0{,}5$; в) 1,5; -1; г) 0,5; 2,5. **7.** При $a = 0$, $a = -\frac{3}{4}$ и $a = -1{,}5$. Вариант 1. **1.** а) 0; $-2{,}5$; б) $\varnothing$; в) $\pm\sqrt{2{,}5}$; г) 0; $\frac{1-a}{2}$. **2.** а) $\varnothing$; б) 1; 1,5; в) 2; 0,5; г) 2; p. **3.** а) 2; 0,4; б) 1; 21,4; в) 2; $2a$. **4.** а) При $a = \pm1$; б) при $a = 0$. **5.** а) $\frac{25}{12}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{9}{8}$. **6.** а) $\varnothing$; б) 3; -1; в) 3; -1; г) ±1. **7.** При $a = 0$, $a = -3$ и $a = -6$. Вариант 2. **1.** а) 0; 1,75; б) $\pm\sqrt{1{,}75}$; в) $\varnothing$; г) 0; $\frac{a-2}{4}$. **2.** а) $\varnothing$; б) 1; 2,5; в) $-0{,}5$; -3; г) -2; p. **3.** а) -4; $\frac{2}{7}$; б) 1; $15\frac{6}{7}$; в) 2; $-2a$. **4.** а) При $a = \pm2$; б) при $a = 0$. **5.** а) $-\frac{25}{8}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $-\frac{5}{4}$. **6.** а) $\varnothing$; б) -1; $\frac{1}{3}$; в) -1; $\frac{1}{3}$; г) ±2. **7.** При $a = -1$, $a = 2$ и $a = 5$. Вариант 3. **1.** а) 0; 0,25; б) $\pm0{,}5$; в) $\varnothing$; г) 0; $\frac{3a+2}{4}$. **2.** а) $\varnothing$; б) 1; $\frac{2}{3}$; в) 1; 0,4; г) $p \pm 1$. **3.** а) $\frac{4}{3}$; $-\frac{2}{3}$; б) 1; $\frac{123}{9}$; в) -4; $-2a$. **4.** а) При $a = \pm1$; б) при $a = 0$ и $a = 1$. **5.** а) $6\frac{1}{8}$; б) $-\frac{9}{8}$; в) $\frac{5}{4}$. **6.** а) $\varnothing$; б) 0; ±1; в) ±1; ±2; г) ±1; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** При $a = 1$, $a = 2\sqrt{2}$ и $a = 8$.

Самостоятельная работа № 14

Подготовительный вариант. **1.** а) ±1; $\pm\sqrt{13}$; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$; в) $\varnothing$. **2.** 132. **3.** 16. **4.** 5%. **5.** 1. Вариант 1. **1.** а) ±3; $\pm\sqrt{2}$; б) $\pm\sqrt{2}$; в) $\varnothing$. **2.** 56. **3.** 13. **4.** 4%. **5.** 3. Вариант 2. **1.** а) ±2; $\pm\sqrt{7}$; б) $\pm\sqrt{7}$; в) $\varnothing$. **2.** 40. **3.** 14. **4.** 5%. **5.** 4. Вариант 3. **1.** а) $\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$; б) $\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$; в) $\varnothing$. **2.** 240 см^2. **3.** 13. **4.** 2%. **5.** 8.

Самостоятельная работа № 15

Подготовительный вариант. **1.** а) $x^2 + 3x - 10 = 0$; б) $3x^2 - 4x - 4 = 0$; в) $x^2 - 4x + 1 = 0$. **2.** 1. **3.** 8. **4.** а) $\frac{p}{15}$; б) $p^2 + 30$; в) $-\frac{p^2+30}{15}$; г) $-45p - p^3$. **5.** а) $(x-2)(x-4)$; б) $(y-2x)(y-4x)$; в) $\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)$. **6.** $-\frac{5x-1}{x+1}$, $-6\frac{2}{13}$. **7.** $\frac{3a-1}{a^2}$. Вариант 1. **1.** а) $x^2 - 11x - 12 = 0$; б) $3x^2 - 8x - 3 = 0$; в) $x^2 - 6x + 7 = 0$. **2.** -1. **3.** 16. **4.** а) $\frac{p}{2}$; б) $p^2 + 4$;

в) $-\frac{p^2+4}{2}$; г) $-p^3-6p$. **5.** а) $(x-2)(x-5)$; б) $(3x+4y)(2x-3y)$; в) $(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$. **6.** $\frac{3x-1}{2x+1}$, $3\frac{3}{8}$. **7.** -12. Вариант 2. **1.** а) $x^2-6x-7=0$; б) $3x^2+8x-3=0$; в) $x^2-6x+7=0$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** а) $\frac{p}{3}$; б) p^2+6; в) $-\frac{p^2+6}{3}$; г) $-9p-p^3$. **5.** а) $(x-2)(x-8)$; б) $(3x-4y)(2x+3y)$; в) $(x+2-\sqrt{6})(x+2+\sqrt{6})$. **6.** $\frac{2x-1}{4x+1}$, $\frac{7}{8}$. **7.** -12. Вариант 3. **1.** а) $x^2-x-12=0$; б) $4x^2+9x-9=0$; в) $x^2-4x-1=0$. **2.** 1. **3.** 8. **4.** а) $-\frac{p}{5}$; б) p^2-10; в) $\frac{p^2-10}{5}$; г) $15p-p^3$. **5.** а) $(x+2)(x+4)$; б) $(3x-4y)(2x+5y)$; в) $4\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$. **6.** $\frac{1-5x}{x-2}$, $-9\frac{1}{11}$. **7.** $\frac{2a+1}{a^2}$.

Самостоятельная работа № 16

Подготовительный вариант. **1.** 3; $-\frac{5}{3}$. **2.** 0,4. **3.** 2; -3. **4.** 1; $1+\sqrt{2}$. **5.** 4; $\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$. **6.** 4; 0,25. Вариант 1. **1.** 3. **2.** 12; -4. **3.** -1. **4.** 1; $\sqrt{3}$. **5.** 2; $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **6.** -1; 0,5; 2. Вариант 2. **1.** 2. **2.** 10; 9. **3.** 2. **4.** 2; $\sqrt{7}$. **5.** 3; $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **6.** 2; 0,5; $2\pm\sqrt{3}$. Вариант 3. **1.** 2,5. **2.** 1,5. **3.** -2; 1; 2. **4.** $-3+\sqrt{10}$. **5.** 1. **6.** 3; $\frac{1}{3}$.

Самостоятельная работа № 17

Подготовительный вариант. **1.** $\frac{3}{8}$. **2.** 20 км/ч. **3.** 16 и 20 дней. **4.** 70 км. **5.** 108 и 36 мишеней. Вариант 1. **1.** $\frac{5}{12}$. **2.** 2 км/ч. **3.** 15 и 30 минут. **4.** $3\frac{1}{3}$ км. **5.** 26,4 и 17,6 страниц в час. Вариант 2. **1.** $\frac{2}{5}$. **2.** 7 км/ч. **3.** 30 и 60 минут. **4.** 3 км. **5.** 80 и 20 м^3/ч. Вариант 3. **1.** $\frac{2}{3}$. **2.** 4 км/ч. **3.** 12 и 6 часов. **4.** 12 и 15 км/ч. **5.** За 10 часов.

Самостоятельная работа № 18

Подготовительный вариант. **1.** а) $a<b$; б) $a>b$. **2.** $b+0{,}04$, b, a, $a-2{,}65$, $a-2\frac{2}{3}$. **3.** Одно. **4.** а) Верно; б) верно. **5.** а) $14<5p+q<20$; б) $5<2q-p<8$; в) $4<\frac{pq}{2}<7{,}5$; г) $\frac{1}{5}<\frac{p}{2q}<\frac{3}{8}$. **7.** $-1{,}6\leqslant a-2ab\leqslant 2{,}2$.

Вариант 1. **1.** а) $a < b$; б) $a > b$. **2.** $b + 2,4$, b, a, $a - \frac{3}{7}$, $a - 0,6$. **3.** Одно. **4.** а) Верно; б) не верно. **5.** а) $8 < p + 2q < 11$; б) $3 < 2q - p < 6$; в) $18 < 3pq < 36$; г) $\frac{1}{4} < \frac{p^2}{4q} < \frac{3}{4}$. **7.** $-21,2 \leqslant a + 4ab \leqslant -0,12$. Вариант 2. **1.** а) $a > b$; б) $a < b$. **2.** $a - 0,6$, $a - \frac{4}{7}$, a, b, $b + 1,1$. **3.** Одно. **4.** а) Верно; б) не верно. **5.** а) $7 < 2p + q < 10$; б) $-3 < q - 2p < 0$; в) $30 < 5pq < 60$; г) $\frac{1}{3} < \frac{p^2}{3q} < 1$. **7.** $0,1 \leqslant a - ab \leqslant 3,6$. Вариант 3. **1.** а) $a > b$; б) $a < b$. **2.** $a - 3,2$, $a - \pi$, a, b, $b + \frac{\pi}{3}$, $b + 1,1$. **3.** Одно. **4.** а) Верно; б) верно. **5.** а) $17 < 2p + q < 20$; б) $-1 < q - 2p < 2$; в) $-100 < -2pq < -72$; г) $1 < \frac{p^2}{2q - p} < 1\frac{12}{13}$. **7.** $-2,5 \leqslant a - 2ab \leqslant 3,5$.

Самостоятельная работа № 19

Подготовительный вариант. **1.** $\{-1; 1; 3\}$. **2.** а) $(-\infty; 1,5)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-1,5; +\infty)$. **3.** 0. **4.** $(6; +\infty)$. **5.** а) $[-2,25; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{14}{37}\right)$. **6.** $[-1; +\infty)$. **7.** При $a < 0,5$. Вариант 1. **1.** $\{-1; 1; -3\}$. **2.** а) $(-\infty; -0,5)$; б) $\varnothing$; в) $(0,5; +\infty)$. **3.** -2. **4.** $(7,5; +\infty)$. **5.** а) $[-0,2; +\infty)$; б) $\left(\frac{160}{69}; +\infty\right)$. **6.** $[1; +\infty)$. **7.** При $a < 1,5$. Вариант 2. **1.** $\{-1; 1; -2\}$. **2.** а) $(-1; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-\infty; 1)$. **3.** -2. **4.** $(-\infty; 0)$. **5.** а) $[-2,6; +\infty)$; б) $\left(\frac{301}{202}; +\infty\right)$. **6.** $(-\infty; 2]$. **7.** При $a < 1,25$.

Вариант 3. **1.** $\{-1; 1; -3\}$. **2.** а) $(0,25; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; -0,5)$. **3.** -1. **4.** $(-\infty; 1,2)$. **5.** а) $(-\infty; 2]$; б) $(-0,25; +\infty)$. **6.** $[1; +\infty)$. **7.** При $a < -4$.

Самостоятельная работа № 20

Подготовительный вариант. **1.** 7. **2.** $(0; 2)$. **3.** а) $(-\infty; -100]$; б) $(1,5; 3]$. **4.** а) $(-1; +\infty)$, наименьшее целое решение — число 0; б) $x = 2$ — решение системы, оно же — наименьшее целое решение. **5.** При $a = 2$ решением является любое действительное число, при $a < 2$ $x \in \left(-\infty; \frac{a-1}{2-a}\right]$, при $a > 2$ $x \in \left[\frac{a-1}{2-a}; +\infty\right)$. **6.** а) При $a = -2$ $\varnothing$, при $a = -1$ $\varnothing$, при $a = 1$ $x \in (0; 4)$; б) при $a = -2$ $x \in \boldsymbol{R}$, при $a = -1$ $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **7.** а) $(-\infty; 5)$; б) $(-0,25; +\infty)$. **8.** При $x \geqslant 6$. Вариант 1. **1.** -3; -2. **2.** $(-0,25; 2)$. **3.** а) $(-\infty; -0,02]$; б) $\varnothing$. **4.** а) $(-1; 3)$; б) $(-1; 2)$. **5.** При $a = -1$ $\varnothing$, при $a > -1$ $x \in \left(-\infty; \frac{2a+1}{a+1}\right]$, при $a < -1$ $x \in \left[\frac{2a+1}{a+1}; +\infty\right)$.

6. а) $(-\infty; 7)$; б) $[-12; +\infty)$. **7.** а) При $a = -2$ $\varnothing$, при $a = 1$ $x \in (-4; 2)$; б) при $a = -2$ $x \in \boldsymbol{R}$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$. **8.** При $x \geqslant 3$. Вариант 2. **1.** 4. **2.** $(0,5; 1,5)$. **3.** а) $(-\infty; -0,03]$; б) $\varnothing$. **4.** а) $(-4; 1)$; б) $(-2; 4)$. **5.** При $a = 1$ $\varnothing$, при $a > 1$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{a-2}{a-1}\right]$, при $a < 1$ $x \in \left[\dfrac{a-2}{a-1}; +\infty\right)$. **6.** а) $(-\infty; 9)$; б) $[-6; +\infty)$. **7.** а) При $a = -2$ $\varnothing$, при $a = 1$ $x \in (0; 2)$; б) при $a = -2$ $x \in \boldsymbol{R}$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **8.** При $x \geqslant -12$. Вариант 3. **1.** -2. **2.** $(-0,4; 4)$. **3.** а) $(-\infty; -0,3]$; б) $\varnothing$. **4.** а) $(1,5; 1,6)$; б) $[2; 5)$. **5.** При $a = -2$ $\varnothing$, при $a < -2$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{a+3}{a+2}\right]$, при $a > -2$ $x \in \left[\dfrac{a+3}{a+2}; +\infty\right)$. **6.** а) $(-\infty; 7]$; б) $[-20; +\infty)$. **7.** а) При $a = -2$ $(-2; 3)$, при $a = 1$ $\varnothing$; б) при $a = -2$ $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$, при $a = 1$ $x \in \boldsymbol{R}$. **8.** При $x \leqslant -6$.

Самостоятельная работа № 21

Подготовительный вариант. **1.** а) 2^{-2}; б) $(x+1)^{-2}$. **2.** а) $\dfrac{1}{8}$; б) $\dfrac{3}{2}$; в) $\dfrac{2}{a^2b^2}$; г) $\dfrac{2a}{b^2}$. **3.** а) $\dfrac{12}{125}$; б) 25; в) 1. **4.** а) a^3; б) $-\dfrac{16a^3}{27b^2}$. **5.** 6. **6.** 65. **7.** -1. Вариант 1. **1.** а) 2^{-1}; б) $(x-3)^{-3}$. **2.** а) $\dfrac{1}{25}$; б) $\dfrac{3}{1}$; в) $-\dfrac{2x}{y^3}$; г) $-\dfrac{2}{x^3y^3}$. **3.** а) $\dfrac{76}{81}$; б) 16; в) 1. **4.** а) a^4; б) $\dfrac{18a^2}{b^2}$. **5.** $\dfrac{5}{7}$. **6.** $-7\dfrac{7}{8}$. **7.** -1. Вариант 2. **1.** а) 3^{-1}; б) $(x-2)^{-2}$. **2.** а) $\dfrac{1}{27}$; б) $\dfrac{4}{1}$; в) $-\dfrac{3b}{c^2}$; г) $-\dfrac{3}{b^2c^2}$. **3.** а) $-1\dfrac{13}{16}$; б) 27; в) 1. **4.** а) a^4; б) $-\dfrac{27b^5}{a^5}$. **5.** $\dfrac{6}{7}$. **6.** 35. **7.** 1. Вариант 3. **1.** а) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$; б) $(2x-1)^{-3}$. **2.** а) $\dfrac{1}{81}$; б) $\dfrac{9}{2}$; в) $-\dfrac{3x^3}{y^3}$; г) $-\dfrac{3}{xy^3}$. **3.** а) $\dfrac{1}{81}$; б) 16; в) 1. **4.** а) a^4; б) 4. **5.** $\dfrac{2}{3}$. **6.** 609. **7.** 2.

Самостоятельная работа № 22

Подготовительный вариант. **1.** а) $4,95 \cdot 10^6$; б) $4,93 \cdot 10^{-4}$; в) $4,27 \cdot 10^2$. **2.** а) $7,8125 \cdot 10^4$; б) $2 \cdot 10^{17}$. **3.** $\dfrac{1}{ab}$. **4.** а) 6 или 7; б) 16 или 15; в) -16 или -17. **6.** $n = -1$, $n = 5$. Вариант 1. **1.** а) $2,4 \cdot 10^5$; б) $4,3 \cdot 10^{-4}$; в) $2,14 \cdot 10^2$. **2.** а) $8 \cdot 10^7$; б) $7,8125 \cdot 10^{16}$. **3.** $\dfrac{a-b}{ab}$. **4.** а) 19 или 20; б) 9 или 8; в) -9 или -10. **6.** $m = -1$, $m = 2$. Вариант 2. **1.** а) $4,3 \cdot 10^6$; б) $3,6 \cdot 10^{-3}$; в) $1,45 \cdot 10^2$. **2.** а) $8,32 \cdot 10^2$; б) $3,25 \cdot 10^{14}$. **3.** $\dfrac{a+b}{ab}$. **4.** а) 19 или 20; б) -3 или -4; в) 3 или 2. **6.** $m = \dfrac{1}{2}$, $m = \dfrac{1}{6}$. Вариант 3. **1.** а) $2,4 \cdot 10^1$;

б) $3{,}7 \cdot 10^{-5}$; в) $4{,}15 \cdot 10^6$. **2.** а) $1{,}8 \cdot 10^6$; б) $1{,}25 \cdot 10^{20}$. **3.** $\frac{ab}{b-a}$. **4.** а) 29 или 30; б) 5 или 4; в) −5 или −6. **6.** $x = -5$, $x = 5$.

Самостоятельная работа № 23

Подготовительный вариант. **1.** а) $y = 4 - 2x + 2x^3$; б) $y = x^3 - x - 1$; в) $y = -x^3 + x - 2$; г) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$. **2.** а) $D(h) = D(f)$, $E(h) = [-6; 4]$; б) $D(h) = D(f)$, $E(h) = [-1; 4]$; в) $D(h) = [-1; 6]$, $E(h) = E(f)$. **3.** Нули: а) 0; б) ±2; в) −2. **4.** а) 1 и 5; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-\infty; 2]$; г) $y > 0$ при $x \in (1; 5)$. **5.** −1. **6.** а) 0; б) 1; в) 2. **7.** $f(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{7}{3x}$. Вариант 1. **1.** а) $y = 4x - 2$; б) $y = 2x - 4$; в) $y = -2x + 1$; г) $y = 2x + 1$. **2.** а) $D(h) = [-3; 4]$, $E(h) = [-4; 2]$; б) $D(h) = [-3; 4]$, $E(h) = [0; 3]$; в) $D(h) = [-1; 6]$, $E(h) = [-2; 1]$. **3.** Нули: а) нет; б) −2. **4.** а) 1 и 3; б) $\boldsymbol{R}$; в) $[-1; +\infty)$; г) $y < 0$ при $x \in (1; 3)$. **5.** 1,5. **6.** При $a < -3$. **7.** $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Вариант 2. **1.** а) $y = 4x + 2$; б) $y = 2x - 2$; в) $y = -2x - 1$; г) $y = 2x - 3$. **2.** а) $D(h) = [-3; 4]$, $E(h) = [-4; 4]$; б) $D(h) = [-3; 4]$, $E(h) = [0; 4]$; в) $D(h) = [-1; 6]$, $E(h) = [-2; 2]$. **3.** Нули: а) нет; б) −1. **4.** а) 1 и −3; б) $\boldsymbol{R}$; в) $[-2; +\infty)$; г) $y < 0$ при $x \in (-3; 1)$. **5.** 0. **6.** При $a < -2$. **7.** $f(x) = -x + \frac{2}{x}$. Вариант 3. **1.** а) $y = 4 - 2x^2$; б) $y = -x^2 - 1$; в) $y = x^2 - 2$; г) $y = -x^2 - 2x + 1$. **2.** а) $D(h) = D(f)$, $E(h) = [-4; 0]$; б) $D(h) = D(f)$, $E(h) = [-2; 2]$; в) $D(h) = [-5; 2]$, $E(h) = E(f)$. **3.** Нули: а) ±2; б) −1. **4.** а) Нет; б) $\boldsymbol{R}$; в) $[2; +\infty)$; г) $y > 0$ при любых $x \in \boldsymbol{R}$. **5.** −1. **6.** При $a < -1{,}25$. **7.** $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

Самостоятельная работа № 24

Подготовительный вариант. **1.** а) Принадлежит; б) принадлежит; в) не принадлежит. **2.** а) −3; б) −5; в) −9; г) −2. **3.** а) 4; б) −7. **4.** а) Больше; б) меньше; в) больше; г) меньше. **5.** а) Больше; б) меньше; в) меньше; г) меньше. **6.** 6 точек. **8.** При $a > 4$ корней нет, при $a = 4$ и $a \leqslant 2$ — один корень, при $a \in (2; 4)$ — два корня. Вариант 1. **1.** а) Принадлежит; б) принадлежит; в) не принадлежит. **2.** а) −2; б) −4; в) −6; г) 1,5. **3.** а) 1; б) −5. **4.** а) Больше; б) меньше; в) больше; г) меньше. **5.** а) Больше; б) меньше; в) меньше; г) меньше. **6.** 8 точек. **8.** При $a > 4$ корней нет, при $a = 4$ и $a \leqslant 0$ — один корень, при $a \in (0; 4)$ — два корня. Вариант 2. **1.** а) Принадлежит; б) принадлежит; в) не принадлежит. **2.** а) 2; б) −1; в) 6; г) −1. **3.** а) 4; б) 4. **4.** а) Больше; б) меньше; в) больше; г) меньше. **5.** а) Больше; б) меньше; в) меньше; г) меньше. **6.** 6 точек. **8.** При $a > 2$ корней нет, при $a = 2$ и $a \leqslant 0$ — один корень, при $a \in (0; 2)$ — два корня. Вариант 3. **1.** а) Принадлежит; б) принадлежит; в) не принадлежит. **2.** а) 14; б) 28; в) 10; г) −2,5. **3.** а) 5; б) 5. **4.** а) Больше; б) меньше; в) больше; г) меньше. **5.** а) Больше; б) меньше; в) меньше; г) меньше. **6.** 2 точки. **8.** При $a > 0{,}5$ корней нет, при $a = 0{,}5$ и $a \in (-\infty; -1{,}5)$ — один корень, при $a = -1{,}5$ и $a \in [-0{,}5; 0{,}5)$ — два корня, при $a \in (-1{,}5; -0{,}5)$ — три корня.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Подготовительный вариант. **1.** а) $\frac{2a}{3a-b}$; б) $\frac{x^2}{27-x^3}$. **2.** 0,8. **3.** $x=-1$, $y=1$. **4.** $\frac{1}{a+1}$. **5.** $4b^2+1$. **6.** (4; 0), (0; −2), (3; −2), (1; 0). Вариант 1. **1.** а) $\frac{4a}{a-2b}$; б) $\frac{1}{x+2}$. **2.** $\frac{5-2a}{2a}$. **3.** $x=1$, $y=2$. **4.** $x-2$. **5.** $9b^2-1$. **6.** (1; 6), (3; 9), (4; 12), (6; 6), (7; 9), (9; 12). Вариант 2. **1.** а) $\frac{2}{2x-y}$; б) $-\frac{1}{b+4}$. **2.** $\frac{5}{y^2-25}$. **3.** $x=-1$, $y=1$. **4.** $\frac{1}{x+2}$. **5.** $a+b$. **6.** (2; 6), (0; 5), (3; 5), (5; 15), (6; 14), (8; 15). Вариант 3. **1.** а) $\frac{a-2b}{ab}$; б) $\frac{x-3}{x^2+3x+9}$. **2.** $\frac{1}{b+3}$. **3.** $x=3$, $y=2$. **4.** $x-1$. **5.** $4x^2-9$. **6.** (−2; 0), (−1; −1), (1; 0), (−4; −10), (−5; −9), (−7; −10).

Контрольная работа № 2

Подготовительный вариант. **1.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 2; 8; в) 0. **2.** 12. **3.** При $n=12$. **4.** Число $(k+2)(k+3)$ — составное. **5.** 29. **6.** 1680. **7.** (−1; −2), (1; 2), (5; 2), (−5; −2). **8.** 22. Вариант 1. **1.** а) 1; 3; 5; 7; 9; б) 2; 8; в) 9. **2.** 12. **3.** а), б) При $n=2$ и $n=8$. **4.** Число $(k+3)(k+4)$ — составное. **5.** 19. **6.** 220. **7.** (3; −1), (3; 1), (−3; 1), (−3; −1). **8.** 14. Вариант 2. **1.** а) 1; 3; 5; 7; 9; б) 2; 8; в) 8. **2.** 4. **3.** а) При $n=3$, $n=7$ и $n=1$; б) при $n=3$ и $n=7$. **4.** Число $(k+1)(k+2)$ — составное. **5.** 17. **6.** 250. **7.** (1; −1), (1; 1), (−1; 1), (−1; −1). **8.** 12. Вариант 3. **1.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 0; 6; в) 9. **2.** 0. **3.** а), б) При $n=2$ и $n=3$. **4.** Число $(k+2)(k+4)$ — составное. **5.** 13. **6.** 264. **7.** (1; −1), (1; 1), (−1; 1), (−1; −1). **8.** 16.

Контрольная работа № 3

Подготовительный вариант. **1.** а) −1; б) $\varnothing$. **2.** а) $2\sqrt{7}$; б) $-3\frac{2}{3}$; в) 2. **3.** Не удовлетворяет. **4.** $\sqrt{11}+\sqrt{22}$, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{11}$, $49\sqrt{3}-7\sqrt{147}$, $5-\sqrt{31}$. **7.** 1. Вариант 1. **1.** а) −25; б) $\varnothing$. **2.** а) $1{,}25\sqrt{3}$; б) −3; в) 2. **3.** Удовлетворяет. **4.** $18\sqrt{5}-3\sqrt{245}$, $6-\sqrt{41}$, $2\sqrt{19}$, $\sqrt{17}+\sqrt{29}$, $7\sqrt{11}$. **7.** 1. Вариант 2. **1.** а) −9; б) $\varnothing$. **2.** а) $-2\sqrt{5}$; б) 11,5; в) 3. **3.** Удовлетворяет. **4.** $\sqrt{31}+\sqrt{30}$, $2\sqrt{19}$, $5\sqrt{3}$, $9\sqrt{3}-3\sqrt{27}$, $\sqrt{7}-4$. **7.** 1. Вариант 3. **1.** а) 4; б) $\varnothing$. **2.** а) $10\sqrt{2}$; б) $5\frac{2}{3}$; в) 1. **3.** Не удовлетворяет. **4.** $5-\sqrt{34}$, $8\sqrt{7}-9\sqrt{28}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{7}+\sqrt{11}$. **7.** 1.

Контрольная работа № 4

Подготовительный вариант. **1.** а) 0; $\frac{4}{3}$; б) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\varnothing$. **2.** а) 2; $-\frac{1}{3}$; б) a; -2; в) -1; $\frac{7}{3}$. **3.** 60 см. **4.** -2. **5.** 12. **6.** $5{,}5 \in [5; 6]$, $2{,}5 \in [2; 3]$. **7.** За 20 и 10 часов. Вариант 1. **1.** а) 0; $-\frac{1}{3}$; б) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$; в) $\varnothing$. **2.** а) 2; $\frac{1}{3}$; б) a; $-2a$; в) 1; $-\frac{5}{3}$. **3.** 40 см. **4.** 8. **5.** 3. **6.** $3{,}5 \in [3; 4]$, $-6{,}5 \in [-7; -6]$. **7.** 32 км. Вариант 2. **1.** а) 0; $-\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$; в) $\varnothing$. **2.** а) -2; $-\frac{1}{3}$; б) $-a$; $2a$; в) -1; $\frac{5}{3}$. **3.** 76 см. **4.** 27. **5.** 12. **6.** $1 \in [0; 2]$. **7.** 30 км. Вариант 3. **1.** а) 0; $-\frac{9}{7}$; б) $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$; в) $\varnothing$. **2.** а) 0,25; -3; б) a; $2a + 1$; в) -1; $\frac{11}{7}$. **3.** 360 см^2. **4.** -5. **5.** 3. **6.** $\frac{2}{13} \in [0; 1]$, $1 \in [0; 2]$. **7.** За 6 и 12 дней.

Контрольная работа № 5

Подготовительный вариант. **1.** а) $(2; +\infty)$; б) $[-5; +\infty)$; в) $\varnothing$. **2.** При $x \in [-2; +\infty)$. **3.** а) $\varnothing$; б) $(1; 6)$. **4.** а) $[1; 2]$; б) $x = 1{,}5$; в) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$; г) $\boldsymbol{R}$. **6.** При $b > -1\frac{4}{11}$. **7.** $[3; 4)$. **8.** $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. Вариант 1. **1.** а) $(-2; +\infty)$; б) $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; в) $\boldsymbol{R}$. **2.** При $x \in [7; +\infty)$. **3.** а) $\varnothing$; б) $(-0{,}25; 5)$. **4.** а) $[1; 7]$; б) $x = 4$; в) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$; г) $\boldsymbol{R}$. **6.** При $b > \frac{1}{13}$. **7.** $\left(-3\frac{2}{3};\ -2\right) \cup [1; 3)$. **8.** $[1; 2]$. Вариант 2. **1.** а) $(2; +\infty)$; б) $[2{,}5; +\infty)$; в) $\boldsymbol{R}$. **2.** При $x \in [2; +\infty)$. **3.** а) $\varnothing$; б) $(1; 6)$. **4.** а) $[-1; 7]$; б) $x = 3$; в) $(-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$; г) $\boldsymbol{R}$. **6.** При $b < -1$. **7.** $(1; 2) \cup (6; 8)$. **8.** $[-1; 2]$. Вариант 3. **1.** а) $(-\infty; -0{,}5]$; б) $\varnothing$; в) $\boldsymbol{R}$. **2.** При $x \in (-\infty; 1]$. **3.** а) $\varnothing$; б) $(1{,}25; +\infty)$. **4.** а) $[-2; 3]$; б) $x = 0{,}5$; в) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; г) $\boldsymbol{R}$. **6.** При $b > \frac{1}{6}$. **7.** $[4; 6)$. **8.** $[0; 6]$.

Контрольная работа № 6

Подготовительный вариант. **1.** а) -32; б) $-\frac{1}{7}$; в) 0; г) 1. **2.** а) a^{-13}; б) 8^{-n}. **3.** а) $a^{-2}(1 - 2a^5)$; б) $a^{-3}(a - 2)$; в) $a^{-3}(a^5 - 2)$. **4.** $a = 5{,}1 \cdot 10^3$; а) 18; б) -1; в) 5. **5.** а) 1,29 г; б) 2 м^3. **6.** а) $\frac{1}{x + y}$; б) 1. Вариант 1. **1.** а) -27;

б) 128; в) 0. **2.** а) a^{-7}; б) $\frac{9}{b}$. **3.** а) $a^{-1}(1 - 3a^4)$; б) $a^{-3}(a^2 - 3)$; в) $a^{-3}(a^4 - 3)$. **4.** $a = 7{,}5 \cdot 10^8$; а) 20; б) 3; в) 14. **5.** $6{,}966 \cdot 10^5$ г. **6.** а) $\frac{4^{2n}}{5}$; б) $\frac{a+1}{1-a}$. Вариант 2. **1.** а) −64; б) $\frac{1}{27}$; в) 0. **2.** а) a^{-4}; б) $-\frac{a^3}{9b}$. **3.** а) $a^{-1}(1 + a^5)$; б) $a^{-4}(a^3 + 1)$; в) $a^{-4}(a^5 + 1)$. **4.** $a = 8{,}7 \cdot 10^8$; а) 22; б) 5; в) 13. **5.** $1{,}0836 \cdot 10^6$ г. **6.** а) 7^{2n}; б) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$. Вариант 3. **1.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 5^7; в) 0. **2.** а) a^{-9}; б) $\frac{9}{2b^2}$. **3.** а) $a^{-3}(1 + 7a^8)$; б) $a^{-5}(a^2 + 7)$; в) $a^{-5}(a^8 + 7)$. **4.** $a = 7{,}3 \cdot 10^{11}$; а) 18; б) 8; в) 17. **5.** $8{,}127 \cdot 10^5$ г. **6.** а) $0{,}4 \cdot 3^{n-1}$; б) $\frac{1-(a+b)^2}{a+b}$.

Контрольная работа № 7

Подготовительный вариант. **1.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $x \approx -0{,}8$; в) $y_{наим} = -2$, наибольшего значения функции не существует; г) $[-2; +\infty)$; д) $y < 0$ при $x \in (-\infty; -0{,}8)$, $y > 0$ при $x \in (-0{,}7; 1) \cup (1; +\infty)$. **2.** а) 33; б) 0,6. **4.** 0 и 5. **6.** а) $x = 1$; б) $y = -x$ и $y = x + 4$. **7.** $(-5{,}2)^{-1}$, $(-5{,}3)^{-2}$, $(5{,}2)^{-2}$, $(5{,}2)^{-1}$, $(0{,}52)^{-1}$, $(0{,}52)^{-2}$. Вариант 1. **1.** а) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; б) $[-2; +\infty)$; в) $x \approx -1{,}7$ и $x = 1$; г) $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1{,}7) \cup (1; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (-1{,}7; -1) \cup (-1; 1)$. **2.** а) $5\frac{2}{3}$; б) 0,2. **4.** −2 и 2. **6.** а) $x = -2$; б) $y = -x + 1$ и $y = x + 5$. **7.** $(-2{,}5)^{-1}$, $(2{,}7)^{-2}$, $(-2{,}5)^{-2}$, $(2{,}5)^{-1}$, $(0{,}25)^{-1}$, $(0{,}25)^{-2}$. Вариант 2. **1.** а) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; б) $[-2; +\infty)$; в) $x = -4$ и $x = 0$; г) $y < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (-4; -1) \cup (-1; 0)$. **2.** а) 9; б) 0,1. **4.** 0 и 4. **6.** а) $x = 2$; б) $y = -x + 5$ и $y = x + 1$. **7.** $(-3{,}1)^{-1}$, $(3{,}2)^{-2}$, $(-3{,}1)^{-2}$, $(3{,}1)^{-1}$, $(0{,}31)^{-1}$, $(0{,}31)^{-2}$. Вариант 3. **1.** а) $(-\infty; -2) \cup$ $\cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$; в) $x \approx -2{,}5$ и $x = 5$; г) $y < 0$ при $x \in (-2{,}5; -2) \cup (2; 5)$, $y > 0$ при $(-\infty; -2{,}5) \cup (-2; 2) \cup (5; +\infty)$. **2.** а) $-\frac{5}{6}$; б) 10. **4.** 1 и 4. **6.** а) $x = 3$; б) $y = x$ и $y = -x - 6$. **7.** $(2{,}5)^{-1}$, $(2{,}7)^{-2}$, $(-2{,}5)^{-2}$, $(2{,}5)^{-1}$, $(0{,}25)^{-1}$, $(0{,}25)^{-2}$.

Итоговая контрольная работа

Подготовительный вариант. **1.** −0,5. **2.** 6. **3.** а) 1; −3; б) $D(f) = \boldsymbol{R}$; в) $E(f) = (-\infty; 2]$; г) $y > 0$ при $x \in (-3; -1)$. **4.** а) −4; 0; 2; 6; б) −4; 0. **5.** 3. **6.** а) (1; 2), (−1; −2), (2; 1), (−2; −1); б) (2; 0), (3; −1), (0; −4), (−1; −3). **7.** $\frac{2}{3x+2} + \frac{3}{2x-1}$. **8.** $\frac{1}{3}$. **10.** 14. **11.** 3. **12.** 3 и 5 дней. Вариант 1. **1.** −4; 0. **2.** 2. **3.** а) −1; 5; б) $D(f) = \boldsymbol{R}$; в) $E(f) = [-3; +\infty)$; г) $y < 0$ при $x \in (-1; 5)$. **4.** а) −3; −2; 0; 1; б) 0; 1. **5.** 2. **6.** а) (1; 4), (−1; −4), (4; 1), (−4; −1), (2; 2), (−2; −2); б) (3; 3), (6; 0), (4; 1), (1; −5), (−2; −2), (0; −3). **7.** $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-1}$. **8.** 3. **10.** 4. **11.** 4. **12.** За 120 и 80 часов.

Вариант 2. **1.** 0; 4. **2.** 4. **3.** а) −3; −1; б) $D(f) = \boldsymbol{R}$; в) $E(f) = [-1; +\infty)$; г) $y < 0$ при $x \in (-3; -1)$. **4.** а) −4; 0; 2; 6; б) 2; 6. **5.** 2. **6.** а) (1; 9), (−1; −9), (9; 1), (−9; −1), (3; 3), (−3; −3); б) (−1; 6), (7; −2), (1; 0), (−3; −12), (−11; −4), (−5; −6). **7.** $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}$. **8.** $\frac{1}{4}$. **10.** 29. **11.** −1. **12.** За 36 часов. Вариант 3. **1.** −3. **2.** 12. **3.** а) 1; 3; б) $D(f) = \boldsymbol{R}$; в) $E(f) = [-1; +\infty)$; г) $y < 0$ при $x \in (1; 3)$. **4.** а) −5; −3; −1; 1; б) ±1. **5.** 1. **6.** а) (1; 1), (−1; −1); б) (3; 0), (1; −2). **7.** $\frac{3}{2x+3} + \frac{2}{x-2}$. **8.** $\frac{1}{21}$. **10.** 11. **11.** −2. **12.** За 12 и 6 часов.

ТЕСТЫ

№ теста	№ варианта	1	2	3	4	5	6
1	1	4	1	1	1	4	2
	2	3	3	4	1	2	3
2	1	3	3	2	1	3	1
	2	3	3	2	2	2	3
3	1	2	3	4	4	3	4
	2	4	2	4	4	2	1
4	1	3	2	1	4	3	2
	2	4	3	4	2	2	2
5	1	2	4	1	2	4	3
	2	4	4	3	3	3	3
6	1	4	1	3	2	3	3
	2	2	1	3	2	4	3
7	1	3	1	4	2	3	1
	2	2	4	4	1	3	1
8	1	2	1	4	3	2	4
	2	4	1	3	2	1	4
9	1	3	3	2	4	1	2
	2	1	3	1	1	2	2
10	1	3	3	3	2	1	4
	2	1	3	2	1	4	4
11	1	3	1	2	4	3	1
	2	4	2	3	1	1	2
12	1	2	3	3	3	1	4
	2	1	4	2	4	3	1
13	1	2	4	3	1	1	2
	2	1	2	2	4	1	1

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Глава 1. **Дроби**

1. а) При $a > 1$; б) при $a = 1$; в) при $a < 1$. **2.** а) При $a > 0$; б) при $a = 0$; в) при $a < 0$. **3.** При $a = 2$, $b = -1$ и при $a = 1$, $b = -2$. **4.** $a = 1$. **5.** $a = 2$, $b = -3$. **6.** $a = 2$, $b = -1$. **7.** $m = n = 1$. **8.** $n > 0$.

Глава 2. **Целые числа. Делимость чисел**

1. а) $m = 3k \pm 1$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; б) m — нечетное число. **2.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 0; 3; 6; 9; в) 0; 4; 8; г) 0; 5; д) 0; 6; е) 5; ж) 0; 9; з) 0; и) 8; к) 1.

Глава 3. **Действительные числа. Квадратный корень**

1. $a \leqslant 1$. **2.** $a > 1$. **3.** $b \leqslant a$. **4.** При $a = b$. **5.** При $a = 22$, $b = 12$. **6.** При $a = -1$, $b = -1$. **7.** При $b < 1$. **8.** а) При $a \geqslant 0$; б) $a \geqslant 0$. **9.** а) При $a > -1$ $x = a + 1$ и $x = -a - 1$, при $a = -1$ $x = 0$, при $a < -1$ корней нет; б) при $a \geqslant -1$ $x = a + 1$, при $a < -1$ корней нет. **10.** а) При $a > -1$ уравнение имеет два корня, при $a = -1$ — один корень, при $a < -1$ корней нет; б) при $a \geqslant -1$ уравнение имеет один корень, при $a < -1$ корней нет.

Глава 4. **Квадратные уравнения**

1. а) При $a \neq 0$; б) при $a = -1$. **2.** а) При $a = 0$ $x = 0$, при $a \neq 0$ $x = 0$ и $x = \dfrac{a-1}{a}$; б) при $a = 0$ решений нет, при $a = 1$ $x = 0$, при $a \in (0; 1)$ $x = \pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$. **3.** При $a = 2$ и $a = 6$. **4.** При $a > -\dfrac{1}{8}$ и $a \neq 0$. **5.** а) $x = a$, $x = a + 1$; б) при $a < 6{,}25$ $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4a}}{2}$, при $a = 6{,}25$ $x = 2{,}5$, при $a > 6{,}25$ действительных корней нет; в) при $a = 0$ $x = -\dfrac{2}{3}$, при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; 1\dfrac{1}{8}\right)$ $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{2a}$, при $a = 1\dfrac{1}{8}$ $x = -\dfrac{3}{2a}$, при $a > 1\dfrac{1}{8}$ действительных корней нет. **6.** При $a = 2$ и $a = -\dfrac{2}{9}$. **7.** $q < 0$, положительный корень имеет большую абсолютную величину. **8.** При $p = -5$. **9.** При $q = -2$. **10.** При $b = 9$. **11.** а) При $a > 0$; б) при $a \geqslant 0$. **12.** а) При $a = -1$ $x = 4$, при $a = 4$ $x = -1$, при $a \neq -1$ и $a \neq 4$ $x = -1$, $x = 4$; б) при $a = -1$ $x = -2$, при $a = 0$ $x = 0$, в остальных случаях $x = a$ и $x = a - 1$.

Глава 5. **Неравенства**

1. При $36 < n < 45$. **2.** а) При $c > 0$; б) при $c < 0$; в) при $c > 0$; г) при $c = 0$. **3.** а), б) При $b > 1$. **4.** а) При $a > 0$; б) при $a < 0$; в) при $a > 0$. **5.** а) $a = 1$; б) $a = \dfrac{1}{3}$. **6.** а) При $b \geqslant -2$ и $a \leqslant 2$ одновременно; б) при $b < -2$, $a > 2$

и $a + b = 0$ одновременно. **7.** а) При $p < 1$; б) при $p \leqslant 1$. **8.** а) При $p \in (-\infty; 1) \cup$ $\cup$ $(2; +\infty)$; б) при $p \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$. **9.** При $a \leqslant 2$. **10.** При $a \leqslant 2$. **11.** а) При $a = 1$ $b \in \boldsymbol{R}$, при $a > 1$ $b \in \left(-\infty; \dfrac{a+1}{a-1}\right]$, при $a < 1$ $b \in \left[\dfrac{a+1}{a-1}; +\infty\right)$; б) при $b = 1$ $a \in \boldsymbol{R}$, при $b > 1$ $a \in \left(-\infty; \dfrac{b+1}{b-1}\right]$, при $b < 1$ $a \in \left[\dfrac{b+1}{b-1}; +\infty\right)$. **12.** а) При $a \in [-1; 2]$; б) при $a < -1$; в) ни при каких. **13.** а) При $a < -2$; б) при $a = -2$; в) при $a > -2$. **14.** а) При $a \geqslant 2$ $x \in (a; +\infty)$, при $a < 2$ $x \in (2; +\infty)$; б) при $a \geqslant 2$ $x \in (-\infty; 2)$, при $a < 2$ $x \in (-\infty; a]$; в) при $a > 2$ $x \in [2; a)$, при $a \leqslant 2$ нет решений; г) при $a \geqslant 2$ $x \in (-\infty; 2]$, при $a < 2$ $x \in (-\infty; a]$. **15.** а) При $a \geqslant 2$ $x \in (2; +\infty)$, при $a < 2$ $x \in (a; +\infty)$; б) при $a \geqslant 2$ $x \in \boldsymbol{R}$, при $a < 2$ $x \in (-\infty; a] \cup [2; +\infty)$; в) при $a \geqslant 2$ $x \in (-\infty; a]$, при $a < 2$ $x \in (-\infty; 2]$. **16.** а) При $a \geqslant 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (a; +\infty)$, при $a < 0$ $x \in (-\infty; a) \cup (0; +\infty)$; б) при $a > 0$ $x \in [0; a]$, при $a = 0$ $x = 0$, при $a < 0$ $x \in [a; 0]$; в) при $a > 0$ $x \in (0; a)$, при $a = 0$ решений нет, при $a < 0$ $x \in (a; 0)$; г) при $a > 0$ $x \in (-\infty; 0] \cup (a; +\infty)$, при $a = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, при $a < 0$ $x \in (-\infty; a) \cup [0; +\infty)$.

Глава 6. **Степень с целым показателем**

1. $n < 0$. **2.** $k < -3$. **3.** а) При $ab > 10$; б) при $\dfrac{a}{b} < 1$. **4.** а) При $a < 0$ и $0 < a < 1$; б) при $a < -1$ и $0 < a < 1$. **5.** а) и б) При $k = 0$.

Глава 7. **Функции и графики**

1. а) При $a < 0$ и $0 < a < 1$; б) при $a < -1$ и $0 < a < 1$. **2.** а) При $k \leqslant 0$; б) при $k = 0$. **3.** а) При $a =$; б) при $a < -0{,}5$. **4.** При $\begin{cases} a = 0, \\ b = 0 \end{cases}$ и при $\begin{cases} a = 2, \\ b = 0. \end{cases}$ **5.** а) При $b = 2$; б) при $k = -1$ и $k = 1$. **6.** $f(x) = \dfrac{2}{x} - x$. **7.** $k = 1$. **8.** Если $k - 1$ — простое число. **9.** При $k = -1$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Феоктистов Илья Евгеньевич

АЛГЕБРА
8 класс

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *О. Б. Нестерова*
Корректоры *Л. В. Дьячкова, Д. С. Ковалёв*
Компьютерная вёрстка и графика: *А. А. Горкин*

Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,0. Тираж 15 000 экз. Заказ № 34110.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8(499)367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8(499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»,
ИНТЕРНЕТ-магазин).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел./факс: 8(495) 783 8284; тел.: 8(495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru
www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8(495)665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru