http://znanija.com/task/20623500

решить тригонометрическое уравнение. (пошагово и подробно, что где на что заменяли, пожалуйста).

$$4\sin^2 x = tg\, x$$

И указать все корни, которые попадают в промеж. $[-\pi; 0]$

РЕШЕНИЕ

Ну тут достаточно просто

$$4\sin^2 x = tg\, x \qquad (1)$$

Выражаем тангенс через синус и косинус

$$4\sin^2 x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (2)$$

Сокращаем на *sinx.*

$$4\sin x = \frac{1}{\cos x} \qquad (3)$$

Замечаем при этом, что такие x, где *sinx=0,* являются корнями уравнения (2), а следовательно и исходного уравнения (1). Т. е. выражение

$$\sin x = 0 \qquad (4)$$

Дает «набор корней»

$$x = \arcsin(0) + \pi k = \pi k,\ где\ k \in \mathbb{Z} \qquad (5)$$

Далее из (1) (а так же (2) и (3)) ясно, что $\cos x \neq 0$ и следовательно

не должны входить в «набор» точки: (Там тангенс «уходит в бесконечность»)

$$x = \arccos(0) + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ где\ n \in \mathbb{Z} \qquad (6)$$

Множества (5) и (6) не пересекаются.

Теперь в (3) умножим левую и правую часть на *cos(x)*. Получаем

$$4\sin x \cos x = 1 \qquad (7)$$

Или

$$2 \cdot 2 \cdot \sin x \cos x = 1$$

Далее выражение $2\sin x \cos x$ заменяем согласно формуле синуса двойного угла $2\sin x \cos x = \sin(2x)$. Соответственно (7) преобразуется к виду.

$$2\sin(2x) = 1$$

Или

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \qquad (8)$$

Решаем уравнение (8) и получаем ещё два «набора» корней.

$$2x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \textit{ где } m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi m, \textit{ где } m \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

$$2x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi l = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l, \textit{ где } l \in \mathbb{Z} \quad (9a)$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi l, \textit{ где } l \in \mathbb{Z} \quad (10a)$$

Теперь разбираемся, что из наборов (5) и (10), (10а) попадает в отрезок $[-\pi; 0]$, а заодно не попадает в набор (6).

Анализируем набор (5)

Для того, чтобы найти такие *k,* при которых, $x \le 0$ решаем неравенство:

$$\pi k \le 0 \qquad (11)$$

Получаем

$$k \le 0 \qquad (12)$$

Т.е. (*k=0, -1, -2, ….*)

Далее для того, чтобы найти такие *k,* при которых, $x \ge -\pi$ решаем неравенство:

$$\pi k \ge -\pi \qquad (13)$$

Получаем

$k \geq -1$ (14)

Т. е. (*k*= *-1, 0, 1,….*)

Из (12), (14) следует, что *k=-1, 0*. Можно отобразить на числовой оси решения (12), (14) неравенств и визуально найти их пересечение.

Следовательно соответствующие им корни x

$$\begin{matrix} k_1 = -1 & x_1 = -\pi \\ k_2 = 0 & x_2 = 0 \end{matrix} \quad (15)$$

Теперь анализируем набор (10)

Для того, чтобы найти такие целые числа *m,* при которых, $x \leq 0$ решаем неравенство:

$$\frac{\pi}{12} + \pi m \leq 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{12} + m \leq 0$$

$$m \leq -\frac{1}{12}$$

Получаем

$$m \leq -\frac{1}{12} \quad (17)$$

Далее, для того, чтобы найти такие m, при которых, $x \geq -\pi$ решаем неравенство:

$$\frac{\pi}{12} + \pi m \geq -\pi \quad (18)$$

$$\frac{1}{12} + m \geq -1$$

Получаем

$$m \geq -1\frac{1}{12} \quad (19)$$

Т. е. (*m*= *-1, 0, 1,….*)

Из (17), (19) следует, что m= *-1*. Следовательно соответствующие им корни x:

$$m=-1 \quad x_3=\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12} \qquad (20)$$

Теперь анализируем набор (10а)

Для того, чтобы найти такие целые числа *l,* при которых, $x\leq 0$ решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{12}+\pi l\leq 0 \qquad (21)$$

$$\frac{5}{12}+l\leq 0$$

Получаем

$$l\leq -\frac{5}{12} \qquad (22)$$

Далее, для того, чтобы найти такие m, при которых, $x\geq -\pi$ решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{12}+\pi l\geq -\pi \qquad (23)$$

$$\frac{5}{12}+l\geq -1$$

Получаем

$$l\geq -1\frac{5}{12} \qquad (24)$$

(Т. е. для (24) *l= -1, 0, 1,….*)

Из (22), (24) следует, что *l= -1*. Следовательно соответствующие им корни x:

$$l=-1 \quad x_4=\frac{5\pi}{12}-\pi=-\frac{7\pi}{12} \qquad (25)$$

На основании аналогичных рассуждений можно заключить, что в отрезок $[-\pi;0]$ из набора (6) попадает только точка $x=-\frac{\pi}{2}$, при $n=-1$, которая не совпадает ни с одним из найденных корней x_1, x_2, x_3, x_4.

Итак, получили 4 корня, попадающих в заданный отрезок $[-\pi;0]$.

ОТВЕТ:

$$x_1 = -\pi$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -\frac{11}{12}\pi$$
$$x_4 = -\frac{7}{12}\pi$$

Из-за того, что неправильно решили уравнение sin(2x)=1/2 (посмотрите в учебник как решаются уравнения вида sin(t)=a), получили лишний корень -5pi/12 и пропустили корень -7pi/12. Исправьте, пожалуйста.

В начальном ответе в выражении (9) пропустил 2 при π.

И ещё одну серию пропустил (9а), (10а).