

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=3x^2-6x$ в точке $(1;-4)$.

$y = 3x^2 - 6x$. $y(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$, т.е. точка $(1; -4)$ не принадлежит параболы $y = 3x^2 - 6x$ и через точку $(1; -4)$ требуется провести прямую, касающуюся параболы $y = 3x^2 - 6x$.

Пусть $(x_0; y_0)$ – точка касания прямой, проходящей через точку $(1; -4)$ с параболой $y = 3x^2 - 6x$, т.е. $y_0 = 3x_0^2 - 6x_0$. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Т.к. $f'(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$, то касательная выглядит так: $y = 6(x_0 - 1)(x - x_0) + 3x_0^2 - 6x_0$. Точка $(1; -4)$ принадлежит этой касательной, значит

$$\begin{aligned} -4 &= 6(x_0 - 1)(1 - x_0) + 3x_0^2 - 6x_0 \Leftrightarrow -6x_0^2 + 12x_0 - 6 + 3x_0^2 - 6x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 - 2 = 3x_0^2 - 6x_0 + 2 = 0. \end{aligned}$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12; \sqrt{D} = 2\sqrt{3}; x_{01} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, x_{02} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

Подставляя в уравнение $y = 6(x_0 - 1)(x - x_0) + 3x_0^2 - 6x_0$ вместо x_0 сначала x_{01} , а затем x_{02} , найдём 2 уравнения касательных к параболы $y = 3x^2 - 6x$, проходящих через точку $(1; -4)$:

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= 6\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3}; \\ y &= -2\sqrt{3}\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) + 3 \cdot \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9} - 6 + 2\sqrt{3}; \\ y &= -2\sqrt{3}x + \frac{6\sqrt{3} - 6}{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$y = -2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 4.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y &= 6\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3}; \\ y &= 2\sqrt{3}\left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) + 3 \cdot \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9} - 6 - 2\sqrt{3}; \\ y &= 2\sqrt{3}x - \frac{6\sqrt{3} + 6}{3} + 4 + 2\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$y = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 4.$$

Если всё же в условии опечатка, и касательную нужно провести через точку параболы $(1; -3)$, то задача не стоит выеденного яйца:

Т.к. $f'(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$, то $f'(x_0) = f'(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$,

$f(x_0) = y(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$, и уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ принимает вид

$$y = -3.$$

Касательная проходит через вершину параболы $(1; -3)$ параллельно оси абсцисс.

Координаты вершины параболы: $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Т.к. $a = 3$, $b = -6$ и $c = 0$, то

$$x = -\frac{-6}{6} = 1; \quad y = \frac{4 \cdot 3 \cdot 0 - (-6)^2}{4 \cdot 3} = -3.$$