

Задача. Изобразите график функции $y = x \operatorname{arctg} x$ по характерным точкам.

Решение. 1) Определим область определения функции. Данная функция состоит из произведения двух элементарных функций: $f(x) = x$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Каждая из них существует на области действительных чисел. Таким образом,

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность:

$$f(-x) = -x \operatorname{arctg}(-x) = -x \cdot (-\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x = f(x).$$

Поскольку $f(-x) = f(x)$, то функция является четной.

Ни одна из функций $f(x) = x$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$ не является периодической, значит и функция $y = x \operatorname{arctg} x$ не является периодической.

3) Найдем точки пересечения функции с осями координат:

- с осью x :

$$x \operatorname{arctg} x = 0; \quad \begin{cases} x = 0, \\ \operatorname{arctg} x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = 0; \end{cases} \quad x = 0.$$

- с осью y :

$$y = 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Значит, $(0; 0)$ – единственная точка пересечения функции с осями координат.

4) Исследуем поведение функции на концах промежутков ее области определения и найдем все асимптоты ее графика.

Поскольку $D(y) = (-\infty; +\infty)$, то нет точек разрыва, а значит нет вертикальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты ($y = kx + b$):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x \right) = [\infty - \infty] = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1+x^2}{-1/x^2}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \\
&= - \frac{1}{0+1} = -1.
\end{aligned}$$

Значит, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ — наклонная асимптота.

5) Найдём производную функции и стационарные точки:

$$y' = (x \operatorname{arctg} x)' = (x)' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$

Решим уравнение $\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} = 0$. Исследуем функ-

цию $y = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$ на монотонность. Найдём производ-

$$\text{ную } y' = \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Уравнение $\frac{2}{(1+x^2)^2} = 0$ не имеет решений, значит функ-

ция $y = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$ либо возрастающая, либо убывающая на всей области определения.

Пусть $x = 0$. Тогда $\frac{2}{(1+0^2)^2} = 2 > 0$. Следовательно дан-

ная функция является возрастающей и имеет единственное решение в уравнении $\arctg x + \frac{x}{1+x^2} = 0$. Подбором убеждаемся, что корнем является $x = 0$.

6) Найдем промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции. Заполним это в виде таблицы:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$
Вывод	Функция убывает	Минимум	Функция возрастает

7) Исследуем функцию на вогнутость и точки перегиба:

$$y'' = \left(\arctg x + \frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Уравнение $\frac{2}{(1+x^2)^2} = 0$ не имеет решений, значит не

имеет точек перегиба.

8) Изобразим график функции:

