Найдём неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}.$$

Замена $(2x+1)=t$ (стандартная замена — гугли «дифференциальный бином»), тогда $x=\dfrac{t-1}{2}$ и $2dx=dt$, $dt=\dfrac{1}{2}dx$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2-2t+1}{4}+\frac{t-1}{2}}}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2-2t+1+2t-2}{4}}}=\frac{1}{2}\int \frac{2dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$$

Замена $y=\sqrt{t^2-1}$, тогда:

$$y^2=t^2-1$$
$$2y\,dy=2t\,dt$$
$$y\,dy=t\,dt$$
$$dt=\frac{y\,dy}{t}$$

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int \frac{y\,dy}{t}\cdot\frac{1}{ty}=\int\frac{dy}{t^2}=\int\frac{dy}{1+y^2}=$$
$$=\operatorname{arctg} y+C=\operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}+C=\operatorname{arctg}\sqrt{(2x+1)^2-1}+C=$$
$$=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2+4x}+C=\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{x^2+x}\right)+C$$

Найдём определённый интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}=\left(\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{x^2+x}\right)\right)\Bigg|_0^{(\sqrt{2}-1)/2}$$

По нижнему пределу будет ноль, найдём, чему равно подкоренное выражение при $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$:

$$x^2+x=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2}{4}=\frac{1}{4}$$
$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$2\sqrt{x^2+x}=1$$

Окончательно:

$$\left(\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{x^2+x}\right)\right)\Bigg|_0^{(\sqrt{2}-1)/2}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

Если что-то непонятно — спрашивай.