

$$\frac{x^2 - 3x - 6}{x} - \frac{8x}{x^2 - 3x - 6} = -2$$

Отметим ОДЗ.

$$\begin{cases} x \neq 0 & (1) \\ x^2 - 3x - 6 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - 3x - 6}{x} - \frac{8x}{x^2 - 3x - 6} + 2 = 0$$

Произведем замену переменных.

$$\text{Пусть } t = \frac{x^2 - 3x - 6}{x}$$

В результате замены переменных получаем вспомогательное уравнение.

$$t - \frac{8}{t} + 2 = 0$$

$$\frac{t^2 + 2t - 8}{t} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

$$t_1 = \frac{-2 - 6}{2 \cdot 1} = -4;$$

$$t_2 = \frac{-2 + 6}{2 \cdot 1} = 2$$

Ответ вспомогательного уравнения: $t = -4; t = 2$

В этом случае исходное уравнение сводится к уравнению

$$\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = -4;$$

$$\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = 2$$

Теперь решение исходного уравнения разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = -4$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{x} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2 \cdot 1} = -3; x_2 = \frac{-1 + 5}{2 \cdot 1} = 2$$

Итак, ответ этого случая: $x = -3; x = 2$.

Случай 2 .

$$\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = 2$$

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49$$

$$x_1 = \frac{5-7}{2 \cdot 1} = -1 ;$$

$$x_2 = \frac{5+7}{2 \cdot 1} = 6$$

Итак, ответ этого случая: $x = -1; x = 6$

Произведем проверку ОДЗ.

$x = -3$ удовлетворяет ОДЗ.

$x = -1$ удовлетворяет ОДЗ.

$x = 2$ удовлетворяет ОДЗ.

$x = 6$ удовлетворяет ОДЗ.

Окончательный ответ: $x = -3; x = -1; x = 2; x = 6$