

Уровень II

1.35. Найдите значение производной функции

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + x - 5) \text{ в точке } x_0 = 0.$$

1.36. Известно, что для функции $f(x) = a \sin 2x + b \cos 4x$ при некоторых значениях a и b выполняются равенства

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4, \quad f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -4. \text{ Найдите значение выражения } 2a + 3\sqrt{3}b.$$

1.37. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \ln(5x^3 + 3x - 7) \text{ в точке } x_0 = 1.$$

1.38. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \cos^3 2x \text{ в точке } x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

1.39. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{2} - 2x^2\right)^3 \text{ в точке } x_0 = \frac{1}{2}.$$

1.40. Найдите целое число, ближайшее к значению

$$f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \text{ если } f(x) = \operatorname{tg}(0,5\pi - x).$$

1.41. Найдите точку x , в которой производная функции

$$f(x) = 2^{2x} + 2^x - 3x \ln 2 + 5 \text{ обращается в нуль.}$$

1.42. Найдите $f'(0,5)$, если $f(x) = e^{1-2x} \ln(2-2x)$.

1.43. Найдите количество натуральных решений неравенства $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = 9 \ln x - 2x^2$.

1.44. Решите уравнение $f'(x) = 0$,

$$\text{если } f(x) = \sqrt{2x^2 + 1 - \sqrt{x}}.$$

1.2. Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 можно провести касательную, не параллельную оси Oy , то значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной $y = kx + b$, то есть $k = f'(x_0)$.

Замечание. Так как угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к оси Ox , то верно равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Физический смысл производной. Если материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)$, то производная функции $y = s(t)$ выражает мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0 , т.е. $v = s'(t_0)$.

Замечание. При решении задач будем считать, что если $s'(t_0) = 0$, то в момент времени t_0 точка останавливается.

Рассмотрим ряд задач, в решении которых необходимо использовать геометрический и физический смысл производной.

Уровень I

1.45. Через точку графика функции $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$ с

абсциссой $x_0 = 2$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к положительному направлению оси абсцисс.

- | | |
|-------|-------|
| 1) -1 | 3) 6 |
| 2) 2 | 4) 17 |

Решение. Исходя из геометрического смысла производной, имеем: $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, где α — угол наклона касательной к оси абсцисс.

Найдем производную в произвольной точке: $f'(x) = -x + 4$.
Тогда тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс:
 $\operatorname{tg} \alpha = f'(2) = 2$.

Ответ: номер верного ответа 2.

1.46. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = 14x^2 - 27x + 15$, в которой касательная наклонена под углом 45° к оси абсцисс.

- 1) $\frac{29}{27}$ 3) 2
2) $-\frac{28}{15}$ 4) 1

Решение. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс, т.е.
 $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Тогда $f'(x_0) = 1$.

Учитывая, что $f'(x) = 28x - 27$, получаем уравнение
 $28x_0 - 27 = 1$, тогда $x_0 = 1$.

Ответ: номер верного ответа 4.

1.47. К графику функции $f(x) = 3x^2 - 8x + 15$ проведена касательная параллельно прямой $y = 4x - 3$. Найдите абсциссу точки касания.

- 1) $\frac{5}{6}$ 3) 2
2) $-\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{5}{3}$

Решение. Касательная параллельна прямой $y = 4x - 3$, значит, их угловые коэффициенты совпадают, тогда угловой коэффициент касательной равен $k = 4$.

Найдем производную функции: $f'(x) = 6x - 8$. Исходя из геометрического смысла производной, имеем $f'(x_0) = 4$, т.е.
 $6x_0 - 8 = 4$, $x_0 = 2$.

Ответ: номер верного ответа 3.

1.48. Укажите функцию, для которой на рис. 1, является касательной с абсциссой $x_0 = 0$.

- 1) $f(x) = \ln(1-x) - x + \frac{x^2}{4} + 4$
2) $f(x) = \ln(x-1) - x - \frac{x^2}{4} - 4$
3) $f(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{4} - 4$
4) $f(x) = \ln(x-1) + x + \frac{x^2}{4} + 4$

Решение. Угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{2} = -2$, значит, необходимо найти функцию, производная которой в точке $x_0 = 0$ равна -2 .

Заметим, что функции 2 и 4 можно сразу исключить из рассмотрения, так как точка $x_0 = 0$ не входит в их область определения. Найдем производную первой функции: $f'(x) = -\frac{1}{1-x} - 1 + \frac{x}{2}$ и подставим значение $x_0 = 0$: $f'(0) = -2$. Комая функция найдена.

Ответ: но

1.49. Найдите произведение абсцисс то графику функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 5x + 4$ касательная наклонена под углом 135°

- 1) 8 3) -8
2) -6 4) 6

Решение. Касательная наклонена под углом 135° , значение производной в этой точке

Так как $f'(x) = x^2 - 8x + 5$ и $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, получаем квадратное уравнение $x_0^2 - 8x_0 + 5 = -1$, $x_0^2 - 8x_0 + 6 = 0$. Дискриминант уравнения $D > 0$, а по теореме Виета произведение корней этого уравнения равно 6.

Ответ: номер верного ответа 4.

1.50. На рис. 2 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику. Найдите $f'(2)$.

- 1) $\sqrt{3}$
- 2) 2
- 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- 4) 1

Решение. Исходя из геометрического смысла производной, значение производной функции в точке касания равно $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

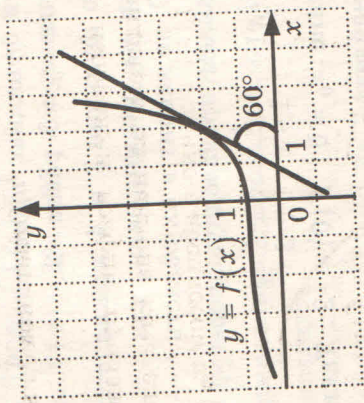


Рис. 2

В данном случае угол наклона касательной в точке с абсциссой 2 равен 60° , $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, значит $f'(2) = \sqrt{3}$.

Ответ: номер верного ответа 1.

1.51. На рис. 3 изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 0
- 4) 3

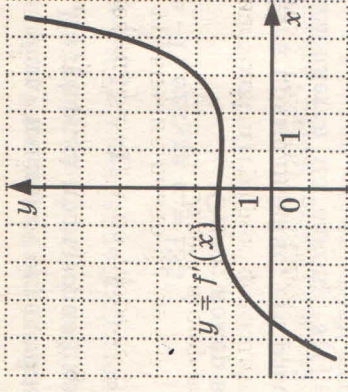


Рис. 3

Решение. Тангенс угла наклона касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. По графику производной определяем значение $f'(3) = 2$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Ответ: номер верного ответа 2.

1.52. На рис. 4 изображен график производной функции $y = f'(x)$. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -\sqrt{3}$.

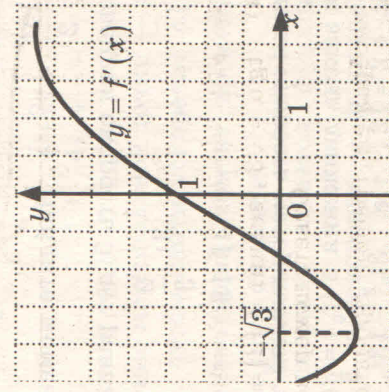


Рис. 4

- 1) 60°
- 2) 45°
- 3) 135°
- 4) 120°

Решение. Тангенс угла наклона определим из равенства $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Из графика производной находим значение производной $f'(-\sqrt{3}) = -1$.

Значит, $\operatorname{tg} \alpha = -1$, откуда $\alpha = 135^\circ$.

Ответ: номер верного ответа 3.

1.53. Тело движется прямолинейно, его расстояние от начала отсчета изменяется по закону $s(t) = 3t^3 - 4t + 5$ (м). Определите мгновенную скорость тела через 2 с после начала движения.

- 1) 32 3) 36
2) 21 4) 30

Решение. Исходя из физического смысла производной, найдем мгновенную скорость тела в произвольный момент времени t : $s'(t) = 9t^2 - 4$, $v(t) = 9t^2 - 4$. Тогда через 2 секунды после начала движения мгновенная скорость равна $v(2) = 9 \cdot 2^2 - 4 = 32$.

Ответ: номер верного ответа 1.

1.54. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 - \frac{13t^2}{2} + 2t + 4$. Найдите момент времени t_0 , в который мгновенная скорость будет равна 12.

- 1) 5 2) 1.5
3) $\frac{2}{3}$ 4) 13

Решение. Мгновенная скорость материальной точки $v(t_0) = 12$, а производная закона движения $s'(t_0) = 3t_0^2 - 13t_0 + 2$. Тогда $3t_0^2 - 13t_0 + 2 = 12$, т.е. $3t_0^2 - 13t_0 - 10 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = -\frac{2}{3}$ и $t_2 = 5$. По смыслу задачи $t \geq 0$, $t = 5$ — искомый момент времени.

Ответ: номер верного ответа 1.

1.55. Прямолинейное движение материальной точки задано уравнением $s(t) = t^3 - 16t^2 - 91t + 1456$. Найдите момент времени t_0 , когда материальная точка остановится.

- 1) 1456 3) $\frac{7}{3}$
2) 13 4) 16

Решение. Когда материальная точка остановится, ее мгновенная скорость будет равна нулю, т.е. $v(t_0) = 0$. Производная уравнения движения: $s'(t) = 3t^2 - 32t - 91$.

Решим уравнение $3t^2 - 32t - 91 = 0$, $t_1 = -\frac{7}{3}$, $t_2 = 13$.

По смыслу задачи $t \geq 0$, следовательно, $t = 13$.

Ответ: номер верного ответа 2.

1.56. Материальная точка движется по закону

$$x(t) = t^3 - 5t^2 + 6t + 7$$

(x — перемещение в м, t — время в с). Через сколько секунд после начала движения ускорение точки будет равно 8 м/с²?

- 1) 1 3) 3
2) 2 4) 4

Решение. Ускорение материальной точки — это изменение ее скорости, т.е. чтобы найти ускорение $a(t)$ материальной точки в произвольный момент времени t необходимо найти производную скорости.

Мгновенная скорость задается функцией $v(t) = x'(t)$, $v(t) = 3t^2 - 10t + 6$, а ускорение — функцией $a(t) = v'(t)$, то есть $a(t) = 6t - 10$.

Найдем момент времени, когда ускорение точки будет равно 8 м/с²: $a(t) = 8$, $6t - 10 = 8$, $t = 3$.

Ответ: номер верного ответа 3.

Уровень II

1.57. Найдите сумму всех значений параметра k , при которых прямая $y = kx - 7$ является касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.

Решение. Составим уравнение касательной к графику заданной функции:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad f'(x_0) = 4x_0 - 5, \text{ тогда}$$

$$y = (4x_0 - 5)(x - x_0) + 2x_0^2 - 5x_0 + 1 \text{ или}$$

$$y = (4x_0 - 5)x - 2x_0^2 + 1 \text{ и } y = kx - 7.$$

Так как прямые совпадают, приравняем угловые коэффициенты и свободные члены:

$$\begin{cases} 4x_0 - 5 = k, & \text{или} & \begin{cases} 4x_0 - 5 = k, \\ -2x_0^2 + 1 = -7 \end{cases} \\ x_0^2 = 4. \end{cases}$$

Тогда либо $\begin{cases} 4x_0 - 5 = k, \\ x_0 = 2 \end{cases}$ и $k = 3$, либо $\begin{cases} 4x_0 - 5 = k, \\ x_0 = -2 \end{cases}$ и $k = -13$. Сумма полученных значений равна -10 .

Ответ: -10 .

1.58. Найдите угловой коэффициент общей касательной к параболам $y = x^2 - 2x + 5$ и $y = x^2 + 2x - 13$.

Решение. Составим уравнение касательной к первой параболы: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$, $y'(x_0) = 2x_0 - 2$.

Подставим в уравнение:

$$y = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 5, \quad y = (2x_0 - 2)x - x_0^2 + 5.$$

Аналогично уравнение касательной ко второй параболы имеет вид $y = (2x_1 + 2)x - x_1^2 - 13$. Заметим, что прямая касается второй параболы в другой точке x_1 . Так как касательная должна быть общей, то угловые коэффициенты и свободные члены в обоих уравнениях должны совпадать, поэтому составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2 = 2x_1 + 2, & \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 + 2, \\ -x_0^2 + 5 = -x_1^2 - 13, \end{cases} \\ x_0^2 = x_1^2 + 18, & \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 + 2, \\ (x_1 + 2)^2 = x_1^2 + 18. \end{cases} \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получим: $x_1 = 3, 5$. Тогда угловой коэффициент касательной $k = 2x_1 + 2 = 9$.

Ответ: 9.

1.59. Определите количество точек, абсциссы которых принадлежат промежутку $[-\pi; \pi]$, и в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ равен 2.

Решение. Преобразуем функцию: $f(x) = \cos 2x$.

Угловой коэффициент касательной равен 2, следовательно, $f'(x) = 2$, т.е. $-2\sin 2x = 2$.

Решим полученное тригонометрическое уравнение:

$$\sin 2x = -1; \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решения, принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$, можно искать несколькими способами:

1) Подстановкой значений n : при $n = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$; при $n = 1$, $x = \frac{3\pi}{4}$. При других значениях переменной n значения x будут выходить за пределы заданного промежутка

$$(n = -1, \quad x = -\frac{5\pi}{4}; \quad n = 2, \quad x = \frac{7\pi}{4}).$$

2) Выбор решений на тригонометрической окружности (рис. 5).

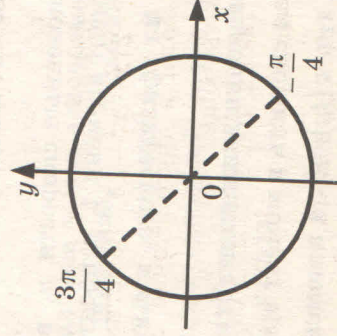


Рис. 5

Отметим найденные решения на тригонометрической окружности. Для этого вначале отметим точку $x = -\frac{\pi}{4}$, а затем симметричную ей относительно начала координат. Промежутки $[-\pi; \pi]$ — это полный круг, следовательно, этому промежутку принадлежат два решения.

Ответ: 2.

1.60. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 5t + 6$. Найдите наибольшее целое значение времени t_0 , при котором мгновенная скорость материальной точки будет меньше, чем 21 м/с.

Решение. Мгновенная скорость материальной точки

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Так как $s'(t_0) = 6t_0^2 - 4t_0 + 5$, то $6t_0^2 - 4t_0 + 5 < 21$.

Тогда $6t_0^2 - 4t_0 - 16 < 0$ или $3t_0^2 - 2t_0 - 8 < 0$.

Решив неравенство методом интервалов, получим:

$$t \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right).$$

Наибольшее целое значение в этом промежутке $t = 1$.

Ответ: 1.

1.61. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{7}{2}t^2 - 16t + 5$. Найдите значение времени t_1 , при условии, что мгновенные скорости v_0 в момент времени $t_0 = 3$ и v_1 в момент времени t_1 относятся как 5:12.

Решение. Исходя из физического смысла производной, $v(t) = s'(t)$.

Производная уравнения движения $s'(t) = 7t - 16$.

Тогда мгновенная скорость в момент времени $t_0 = 3$:

$v(t_0) = 7t_0 - 16$, т.е. $v(t_0) = 5$, а в момент t_1 :

$v(t_1) = 7t_1 - 16$.

По условию $\frac{v(t_0)}{v(t_1)} = \frac{5}{12}$ или $\frac{5}{7t_1 - 16} = \frac{5}{12}$.

Следовательно, $7t_1 - 16 = 12$, $7t_1 = 28$, $t_1 = 4$.

Ответ: 4.

1.62. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $s_1(t) = 3t^2 - 7t - 16$ и $s_2(t) = t^2 - 2t + 12$. Найдите сумму мгновенных скоростей материальных точек в тот момент времени, когда первая точка удалена от начала отсчета вдвое дальше, чем вторая.

Решение. В момент времени, когда первая точка удалена от начала отсчета вдвое дальше, чем вторая, выполняется равенство $s_1(t) = 2s_2(t)$, т.е. $3t^2 - 7t - 16 = 2t^2 - 4t + 24$. Получим уравнение $t^2 - 3t - 40 = 0$, корни которого $t_1 = 8$, $t_2 = -5$. Но значение $t_2 = -5$ меньше нуля, и по смыслу задачи решением быть не может, значит, искомым момент времени $t = 8$.

Для решения задачи необходимо найти мгновенные скорости материальных точек в этот момент времени. Исходя из физического смысла производной, мгновенная скорость материальной точки $v(t) = s'(t)$, т.е. $v_1(t) = 6t - 7$, $v_2(t) = 2t - 2$. Подставив $t = 8$, получим $v_1(8) = 41$, $v_2(8) = 14$. Тогда сумма мгновенных скоростей равна 55.

Ответ: 55.

1.63. Две материальные точки одновременно начали прямолинейное движение, заданное уравнениями $s_1(t) = t^2 + 2t - 15$ и $s_2(t) = 3t^2 + 2t - 5$. Найдите произведение мгновенных скоростей точек в момент времени, когда сумма расстояний от этих точек до начала отсчета будет равна 100 метров.

Решение. Найдем момент времени, когда сумма указанных расстояний составит 100 метров: $s_1(t) + s_2(t) = 100$, тогда