

Лекция №5

Прямая на плоскости.

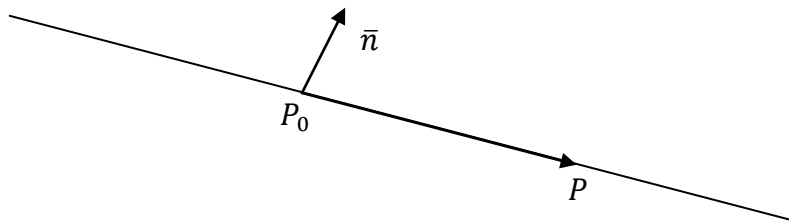
Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

1. Уравнение прямой, задаваемой точкой и вектором нормали.

Пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой, а вектор $\vec{n}(A, B)$ перпендикулярен прямой.



Рассмотрим произвольную точку $P(x, y)$, лежащую на этой прямой. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{P_0P}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Запишем это выражение в координатах векторов, учитывая, что $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

Это уравнение и есть уравнение прямой задаваемой точкой и нормалью. Если раскрыть скобки и обозначить $C = -Ax_0 - By_0$, получим общее уравнение прямой на плоскости.

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

Пример. Написать уравнение прямой линии, проходящее через точку с координатами $(-2, 3)$ перпендикулярно вектору $(3, -5)$.

Решение. Очевидно $P_0(x_0, y_0) = (-2, 3)$, $\vec{n}(A, B) = (3, -5)$. Подставляем в (1).

$$3(x + 2) - 5(y - 3) = 0$$

Раскрываем скобки

$$3x + 6 - 5y + 15 = 0$$

и приводим подобные

$$3x - 5y + 21 = 0$$

Замечание. Из вывода уравнения прямой следует, что коэффициенты при неизвестных в общем уравнении прямой – это координаты вектора нормали.

2. Некоторые свойства общего уравнения прямой линии.

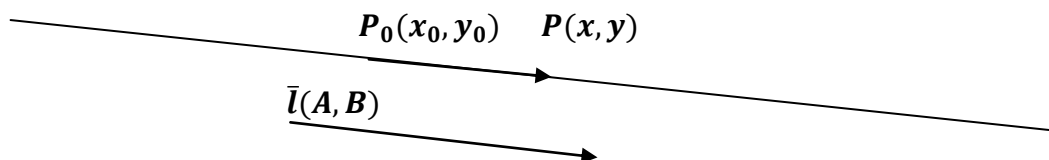
$$Ax + By + C = 0$$

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

$C = 0, A \neq 0, B \neq 0$	Прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат
$A = 0, B \neq 0, C \neq 0$	Прямая $By + C = 0$ параллельна оси OX
$B = 0, A \neq 0, C \neq 0$	Прямая $Ax + C = 0$ параллельна оси OY
$B = 0, C = 0, A \neq 0$	Прямая $Ax = 0$ совпадает с осью OY
$A = 0, C = 0, B \neq 0$	Прямая $By = 0$ совпадает с осью OX

3. Уравнение прямой, задаваемой точкой и направляющим вектором.

Пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой, а вектор $\vec{l}(A, B)$ параллелен прямой или лежит на прямой.



Рассмотрим произвольную точку $P(x, y)$, лежащую на этой прямой. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{P_0P}$ коллинеарен вектору $\vec{l}$. Запишем условие коллинеарности векторов, учитывая что координаты вектора $\overrightarrow{P_0P}$ равны $(x - x_0, y - y_0)$

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} \quad (3)$$

Пример. Написать уравнение прямой линии, проходящее через точку с координатами (4,6) параллельно вектору (3, -5).

Решение. Очевидно $P_0(x_0, y_0) = (4, 6)$, $\vec{l}(A, B) = (3, -5)$. Подставляем в (3).

$$\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 6}{-5}$$

Преобразуя это уравнение, получаем

$$-5x + 20 = 3y - 18$$

$$-5x - 3y + 38 = 0$$

$$5x + 3y - 38 = 0$$

Пример. Написать уравнение прямой линии, проходящее через точку с координатами (-3,5). Прямая должна быть перпендикулярно прямой

$$2x + 3y + 5 = 0$$

Решение. Очевидно $P_0(x_0, y_0) = (-3, 5)$. Так как прямая $2x + 3y + 5 = 0$ перпендикулярна искомой прямой, то вектор нормали к ней (2,3) будет направляющим вектором для искомой прямой. Подставляем в (3).

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 5}{3}$$

$$3x + 9 = 2y - 10$$

$$3x - 2y + 19 = 0$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Написать уравнение прямой линии, проходящей через эти точки.

Для написания уравнения прямой линии необходимо взять точку на этой прямой линии. Для этого есть даже две точки. Возьмем в качестве точки, через которую проходит прямая линия, точку $M_1(x_1, y_1)$. Нужен вектор, который перпендикулярен прямой линии или параллелен ей. В данном случае есть параллельный вектор, а именно вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Поэтому, можем записать уравнение прямой линии, используя формулу (3).

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (4)$$

Замечание. Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Решение. Очевидно $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$. Подставляем в (4).

$$\frac{x + 1}{3 + 1} = \frac{y - 2}{4 - 2}$$

$$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{2}$$

$$2x + 2 = 4y - 8$$

$$2x - 4y + 10 = 0$$

5. Уравнение прямой линии построенной по точке и угловому коэффициенту.

Рассмотрим уравнение прямой (4), проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и выразим переменную y .

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$$

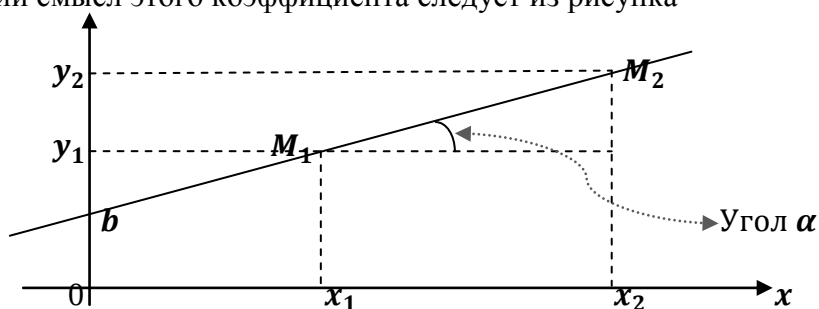
Обозначим

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$$

Получим уравнение прямой линии в следующей форме

$$y = kx + b$$

Число k называется угловым коэффициентом, число b называется свободным членом. Геометрический смысл этого коэффициента следует из рисунка



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}(\alpha)$$

Т.е. угловой коэффициент – это тангенс угла наклона прямой к оси OX . Значение $y = b$ при $x = 0$. Свободный член – это отрезок, который прямая отсекает на оси ординат.

6. Угол между прямыми линиями на плоскости.

Предположим, заданы две прямые при помощи угловых коэффициентов.

$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_2x + b_2$$

Угол между этими прямыми α можно определить, используя формулу

$$tg(\alpha) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right|$$

Эта формула следует из алгебраической формулы тангенса разности углов.

$$tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg(\alpha_1) - tg(\alpha_2)}{1 + tg(\alpha_1)tg(\alpha_2)}$$

Для параллельных прямых

$$k_2 = k_1$$

Для перпендикулярных прямых ($1 + k_2k_1 = 0$)

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Из последней формулы следует **уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.**

Прямая линия, проходящая через точку $P_0(x_0, y_0)$ и параллельна к прямой линии, задаваемой уравнением $y = kx + b$, представляется уравнением:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Прямая линия, проходящая через точку $P_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярная к прямой линии, задаваемой уравнением $y = kx + b$, представляется уравнением:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$$

Пример. Написать уравнения прямых проходящих через точку $A(-3, 2)$, параллельно и перпендикулярно прямой $y = 4x - 5$.

Решение. Угловой коэффициент прямой $y = 4x - 5$ равен 4. Поэтому, прямая линия, параллельная данной прямой линии, имеет вид

$$y - 2 = 4(x + 3)$$

Или, приведя подобные, получаем

$$4x - y + 14 = 0$$

Прямая линия, перпендикулярная данной прямой линии, имеет вид

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x + 3)$$

Или, приведя подобные, получаем

$$x + 4y - 5 = 0$$

7. Уравнение прямой линии в отрезках.

Если в общем уравнении прямой линии

$$Ax + By + C = 0$$

свободный член отличен от нуля $C \neq 0$, то уравнение может быть преобразовано следующим образом

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

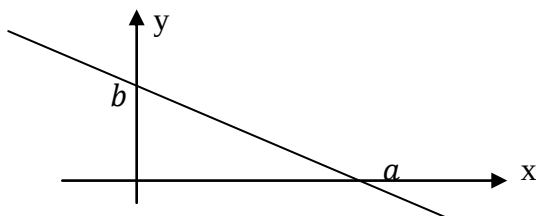
Обозначим

$$a = \frac{-C}{A}, \quad b = \frac{-C}{B}$$

получаем уравнение прямой линии в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью OX , а b – координатой точки пересечения прямой с осью OY .



Пример. Прямая линия отсекает на оси OX отрезок -3 , а на оси OY отрезок 2 . Написать уравнение прямой линии.

Решение. Используя уравнение в отрезках, получаем.

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$$

Приведя выражение к общему знаменателю, получаем

$$2x - 3y = -6$$

$$2x - 3y + 6 = 0$$

8. Нормальное уравнение прямой линии.

Рассмотрим общее уравнение прямой линии.

$$Ax + By + C = 0$$

Нормальным уравнением прямой линии называется уравнение прямой линии в виде

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Если

$$\bar{n} = (A, B)$$

вектор перпендикулярный прямой, то вектор

$$\bar{e} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

имеет единичную длину. Другими словами, нормальное уравнение прямой линии - это уравнение прямой линии, задаваемое единичным вектором нормали. Нормальное уравнение прямой линии обладает очень важным свойством.

Если в нормальное уравнение прямой подставить координаты любой точки, то получится число, модуль которого равно расстоянию от точки до прямой линии. Другими словами. Если дана точка $P(x_0, y_0)$, то ее расстояние до прямой

$$Ax + By + C = 0$$

вычисляется по формуле

$$Dist(P) = \left| \frac{Ax_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Пример. Дано общее уравнение прямой линии $12x - 5y - 65 = 0$. Найти расстояние от точки $P(3, 2)$ до этой прямой

Решение. Напишем нормальное уравнение прямой линии, учитывая что

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$$

Нормальное уравнение прямой линии

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{65}{13} = 0$$

Подставим в левую часть этого уравнения координаты точки $P(3, 2)$

$$Dist(P) = \left| \frac{12 \cdot 3}{13} - \frac{5 \cdot 2}{13} - \frac{65}{13} \right| = \left| -\frac{39}{13} \right| = 3$$