

Поскольку пирамида правильная, то в основании лежит квадрат ABCD, а вершина S проецируется в точку пересечения диагоналей квадрата.

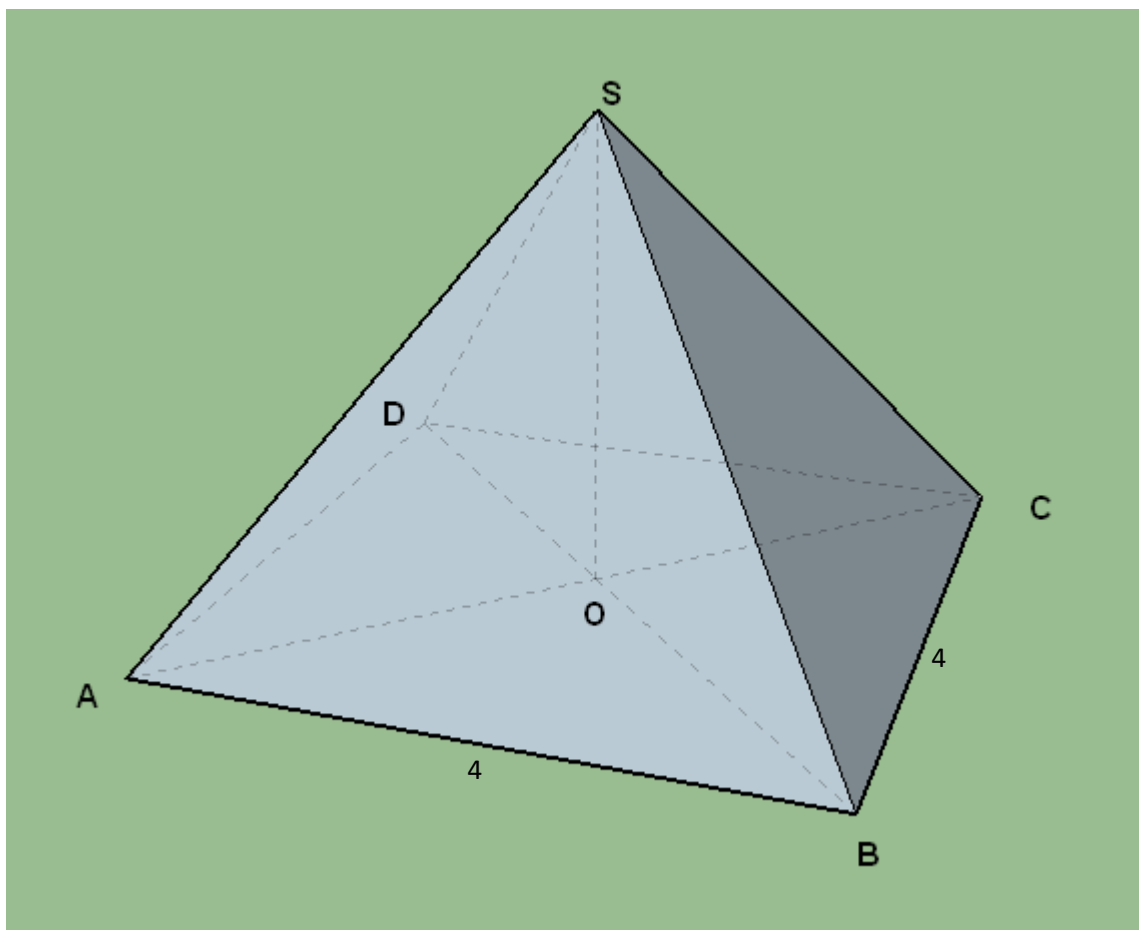
Диагональное сечение DSB по условию является равносторонним треугольником. Следовательно

$$DS = SB = DB$$

$$DO = OB = DB/2$$

Треугольник DBC прямоугольный.

По теореме Пифагора



$$DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$DO = \frac{\sqrt{32}}{2} = \sqrt{\frac{32}{4}} = \sqrt{8}$$

Треугольник DOS прямоугольный. По теореме Пифагора находим высоту пирамиды

$$H = SO = \sqrt{DS^2 - DO^2} = \sqrt{(\sqrt{32})^2 + (\sqrt{8})^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Площадь основания – площадь квадрата

$$S_{\text{осн}} = AB^2 = 4^2 = 16$$

Формула объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Вычисляем

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{10} = \frac{32\sqrt{10}}{3}$$

Ответ: $\frac{32\sqrt{10}}{3}$