

1. а) Решите уравнение: $\sin 2x = 2\sin x + \sin(x+3\pi/2)+1$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -5\pi/2]$

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1 &\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x_2 = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) В середине 60-х годов прошлого века нас подобные вещи учили делать аналитически, а не с помощью единичной окружности. Единичная окружность хороша, когда отрезок $\leq 2\pi$. Нам же предлагали найти корни на отрезке (например) $\left[-7\pi; \frac{11\pi}{3}\right]$. А в данной задаче это выглядит так:

1) $x_1 = 2\pi k$. $-4\pi \leq 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -4 \leq 2k \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -2 \leq k \leq -1,25$. В промежутке $[-2; -1,25]$ попадает только одно целое значение $k = -2$. Поэтому $x = -4\pi$.

2) $x_2 = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$.

2.1. $n = 2m$. $-4\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq -\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -4 \leq \frac{1}{6} + 2m \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{25}{6} \leq 2m \leq -\frac{5}{2} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{25}{12} \leq m \leq -\frac{16}{12}$. В промежуток $\left[-\frac{25}{12}; -\frac{16}{12}\right]$ попадает только одно целое

значение $m = -2$. $x = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -3\frac{5}{6}\pi = -\frac{23\pi}{6}$.

2.2. $n = 2m + 1$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$.

$$-4\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi m \leq -\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -4 \leq \frac{5}{6} + 2m \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{29}{6} \leq 2m \leq -\frac{5}{2} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{29}{12} \leq m \leq -\frac{20}{12}$$
. В промежуток $\left[-\frac{29}{12}; -\frac{20}{12}\right]$ попадает только одно целое

значение $m = -2$. $x = -\frac{\pi}{6} - 4\pi + \pi = -3\frac{1}{6}\pi = -\frac{19\pi}{6}$.

Ответ: $-4\pi, -3\frac{5}{6}\pi, -3\frac{1}{6}\pi$.