

5. Найти $\text{grad } u$ в точке M_0 и производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ в точке M_0 по направлению данного вектора.

$u = \ln(2x + y^2 + 2\sqrt{z})$, $M_0(1; -1; 4)$ по направлению вектора $\vec{a} = \{3; 6; -6\}$.

По определению

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\ln(2x + y^2 + 2\sqrt{z}) \right)'_x = \frac{2}{2x + y^2 + 2\sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\ln(2x + y^2 + 2\sqrt{z}) \right)'_y = \frac{2y}{2x + y^2 + 2\sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\ln(2x + y^2 + 2\sqrt{z}) \right)'_z = \frac{1}{\sqrt{z}(2x + y^2 + 2\sqrt{z})}$$

Следовательно, градиент в произвольной точке:

$$\text{grad } u = \left(\frac{2}{2x + y^2 + 2\sqrt{z}}; \frac{2y}{2x + y^2 + 2\sqrt{z}}; \frac{1}{\sqrt{z}(2x + y^2 + 2\sqrt{z})} \right)$$

Подставляем координаты точки и получаем градиент в точке:

$$2x + y^2 + 2\sqrt{z} = 2 \cdot 1 + (-1)^2 + 2\sqrt{4} = 7$$

$$\text{grad } u|_{M_0} = \left(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{1}{14} \right)$$

Производная в точке по направлению вектора вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{M_0}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{-6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

Следовательно

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{7} \right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{42} - \frac{8}{42} - \frac{2}{42} = -\frac{1}{7}$$

Ответ:

$$\text{grad } u|_{M_0} = \left(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{1}{14} \right); \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = -\frac{1}{7}$$