

2. <http://znaniya.com/task/2025792> Решить уравнение

Бернулли:

$$3y' - 2y = x^3 y^{-2}$$

Решение:

Ну кто такое уравнение Бернулли и схему его решения, а также способы решения линейных дифференциальных уравнений можете посмотреть в учебниках. (Чтоб не возникало вопросов типа: « почему действуем именно так, а не иначе») Сейчас мы просто применим соответствующие схемы решения к данному уравнению.

Итак:

$$3y' - 2y = x^3 y^{-2} \quad (1)$$

Перепишем в виде:

$$3y' - 2y - x^3 y^{-2} = 0 \quad (2)$$

Согласно рекомендациям схемы разделим уравнение на y^2 или, что тоже самое умножим на y^2 .

$$3y'y^2 - 2y^3 - x^3 = 0 \quad (3)$$

Затем произведем замену функции

$$z(x) = y^3 \quad (4)$$

Соответственно производная новой функции будет равна:

$$z'(x) = 3y^2 \cdot y' \quad (5)$$

Подставляем выражения (4), (5) в уравнение (3).

$$z' - 2z - x^3 = 0$$

или

$$z' - 2z = x^3 \quad (6)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Возможно применить прием вариации постоянной. Но там вылезает

интеграл вида:

$$\int x^3 e^{-2x} dx$$

который берется по частям 3 раза. (я делал и так)

Но проще получается так. Будем общее решение неоднородного уравнения искать в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и ненулевого частного решения неоднородного уравнения. Схематично так:

$$z_{\text{он}} = z_{\text{оо}} + z_{\text{чн}} \quad (7)$$

Однородное уравнение соответствующее (6), т. е. без «правой части».

$$z' - 2z = 0 \quad (8)$$

Уравнение (8) кроме того, что оно однородное линейное является так же уравнением с разделяющимися переменными и может быть проинтегрировано «в лоб». Для очень ленивых можно порекомендовать способ через характеристическое уравнение.

$$\lambda - 2 = 0 \quad (9)$$

Находим корни уравнения (9)

$$\lambda = 2 \quad (10)$$

И общее решение однородного уравнения (8) записываем в виде

$$z = Ke^{\lambda x} \quad (11)$$

Где К – произвольная константа.

Таким образом с учетом (10), (11) решение общего однородного уравнения (8) (и по совместительству часть общего решения неоднородного уравнения (6)) равна.

$$z_{\text{оо}} = Ke^{2x} \quad (12)$$

Далее ищем частное решение уравнения (6). В правой части многочлен 3-й степени. Вот и ищем решение в виде многочлена 3-й степени и применяем метод неопределенных коэффициентов.

$$z_{\text{чн}} = z(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (13)$$

Находим производную решения

$$z'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad (14)$$

И подставляем выражения (13), (14) в (6)

$$3Ax^2 + 2Bx + C - 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3$$

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые.

$$-2Ax^3 + (3A - 2B)x^2 + (2B - 2C)x + C - 2D = x^3 \quad (15)$$

Сравниваем коэффициенты в правой и левой частях выражения (15) при соответствующих степенях x . Получаем систему:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 3A - 2B = 0 \\ 2B - 2C = 0 \\ C - 2D = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Решаем систему (16). (Из 1-го уравнения выражается A , а далее из 2-го получаем B через A , из 3-го C через B , из 4-го D через C).

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2}A = -\frac{3}{4} \\ C = B = -\frac{3}{4} \\ D = \frac{C}{2} = -\frac{3}{8} \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения:

$$z_{\text{чн}} = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \quad (18)$$

И соответственно, с учетом (12), (18), общее решение уравнения (6)

$$z_{\text{он}} = z(x) = K e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \quad (19)$$

Теперь возвращаемся к исходной функции $y(x)$. Согласно (4):

$$y = \sqrt[3]{z} \quad (20)$$

Тогда, с учетом (19), (20), мы можем записать общее решение ис-

ходного уравнения (1), (2).

$$y(x) = \sqrt[3]{K e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}} = \left(K e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ОТВЕТ:

$$y(x) = \left(K e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$