$$\left\{\begin{array}{l} x^4-x^2+y^4-y^2=612 \\ x^2+xy+y^2=39 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^4+y^4-x^2-y^2=612 \\ x^2+y^2+xy=39 \end{array}\right.$$

произведём замену: $a=x+y;\ b=xy$

преобразуем уравнение

$$x^4+y^4-x^2-y^2=612$$

$$(x^4+y^4)-(x^2+y^2)-612=0$$

$$((x^2+y^2)^2-2(xy)^2)-((x+y)^2-2xy)-612=0$$

$$(((x+y)^2-2xy)((x+y)^2-2xy))-2(xy)^2)-((x+y)^2-2xy)-612=0$$

$$(x+y)^4-2xy(x+y)^2-2xy(x+y)^2+4(xy)^2-2(xy)^2-(x+y)^2+2xy-612=0$$

$$(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2-(x+y)^2+2xy-612=0$$

подставим переменные

$$a^4-4ba^2+2b^2-a^2+2b-612=0$$

преобразуем уравнение

$$x^2+y^2+xy=39$$

$$((x+y)^2-2xy)+xy=39$$

$$(x+y)^2-xy-39=0$$

подставим переменные

$$a^2-b-39=0$$

запишем систему

$$\left\{\begin{array}{l} a^4-4ba^2+2b^2-a^2+2b-612=0 \\ a^2-b-39=0 \end{array}\right.$$

произведём замену: $c=a^2$

запишем

$$\left\{\begin{array}{l} c=a^2 \\ \left[\begin{array}{l} c^2-4bc+2b^2-c+2b-612=0 \\ c-b-39=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c=a^2 \\ \left[\begin{array}{l} (b+39)^2-4b(b+39)+2b^2-(b+39)+2b-612=0 \\ c=b+39 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

решаем вспомогательное уравнение

$$(b+39)^2-4b(b+39)+2b^2-(b+39)+2b-612=0$$

$$b^2+78b+1521-4b^2-156b+2b^2-b-39+2b-612=0$$

$$-b^2-77b+870=0$$

$$b^2+77b-870=0$$

$$D=77^2-4\cdot1\cdot(-870)=5929+3480=9409$$

$$b_1=\frac{-77+97}{2}=10$$

$$b_2=\frac{-77-97}{2}=-87$$

$$\begin{cases} c=a^2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=10 \\ c=10+39 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-87 \\ c=-87+39 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a^2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=10 \\ c=49 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-87 \\ c=-48 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=10 \\ a=\pm7 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-87 \\ a^2\neq-48 \end{cases} \end{array}\right.$$

заменим переменные, запишем систему

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=10 \\ x+y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=10 \\ x+y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=10 \\ x=7-y \end{cases} \\ \begin{cases} xy=10 \\ x=-7-y \end{cases} \end{array}\right.$$

случай 1

$$y(7-y)=10$$

$$y^2-7y+10=0$$

$$D=(-7)^2-4\cdot1\cdot10=49-40=9$$

$$y_1=\frac{7+3}{2}=5$$

$$y_2=\frac{7-3}{2}=2$$

случай 2

$$y(-7-y)=10$$

$$y^2+7y+10=0$$

$$D=7^2-4\cdot1\cdot10=49-10=9$$

$$y_1 = \frac{-7+3}{2} = -2$$

$$y_2 = \frac{-7-3}{2} = -5$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y=5 \\ x=7-5 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=7-2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y=-5 \\ x=-7-(-5) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ x=-7-(-2) \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y=5 \\ x=2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=5 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y=-5 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ x=-5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $(x=2\, y=5);\ (x=5\, y=2);\ (x=-2\, y=-5);\ (x=-5\, y=-2)$