Вариант 1

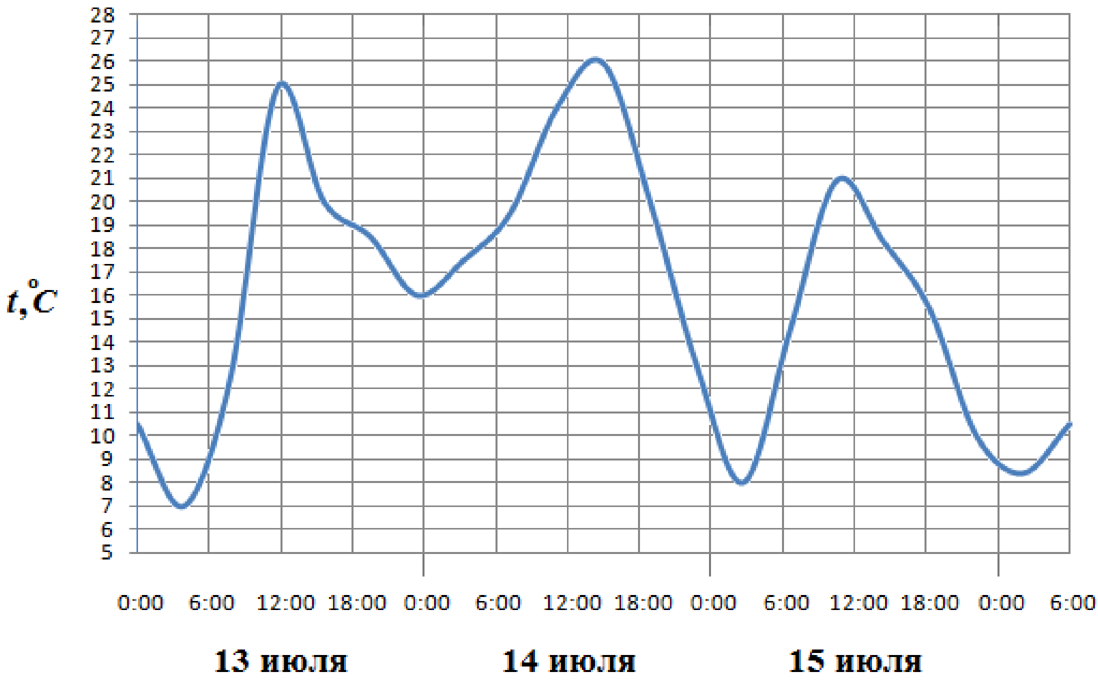
Часть 1

Ответом на задания В1 — В15 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Стоимость проездного билета на месяц составляет 760 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 22 рубля. Аня купила проездной и сделала за месяц 44 поездки. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

B2. В магазине «Сделай сам» вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 3300 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

B3. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B4. Для группы иностранных гостей требуется купить 10 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в следующей таблице.

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	283	200	Нет
Б	271	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3000 руб.
В	302	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 2500 руб.

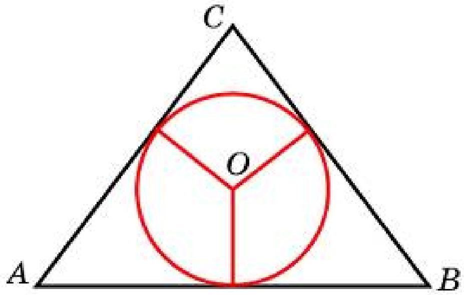
Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответ запишите наименьшую сумму в рублях.

B5. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 176. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.

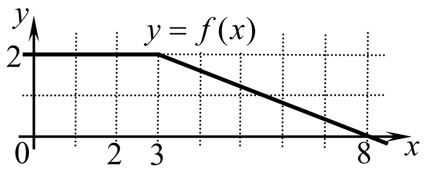
B6. По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина **А**, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина **Б**, равна 0,89. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

B7. Найдите корень уравнения $\sqrt{12+x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

B8. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, а его основание равно 6. Найдите радиус вписанной в данный треугольник окружности.



B9. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



B10. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 111. Найдите площадь поверхности шара.

B11. Найдите значение выражения $\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8}-\sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8}$.

B12. Катер должен пересечь реку, ширина которой $L=100$ м, а скорость течения $u=0,5$ м/с, так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t=\frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha$, где α — острый угол, задающий направление движения катера (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

B13. Найдите угол DB_1A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=13$, $AD=5$, $AA_1=12$. Ответ дайте в градусах.

B14. Дорога между пунктами **A** и **B** состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 8 км. Турист прошёл путь из **A** в **B** за 5 часов. Время его движения на спуске составило 1 час. С какой скоростью турист шёл на спуске, если скорость его движения на подъёме меньше скорости движения на спуске на 3 км/ч?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$ на отрезке $[1;3]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 — С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

С2. Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол $60°$. Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x (x^3 - 1) \le \log_x (x^3 + 2x - 4), \\ \sqrt{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 3} \ge 2^x - 3. \end{cases}$$

С4. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO{:}OD = 3{:}1$ и $AC = 2a$.

С5. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(\frac{3+2x^4}{1+x^4}\right) + \log_a\left(\frac{5+4x^4}{1+x^4}\right) > 1$ выполняется для всех действительных значений x.

С6. Петя умножил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное a. Вася умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное b.

а) Может ли модуль разности чисел a и b равняться 8?

б) Может ли модуль разности чисел a и b равняться 11?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел a и b?

Вариант 2

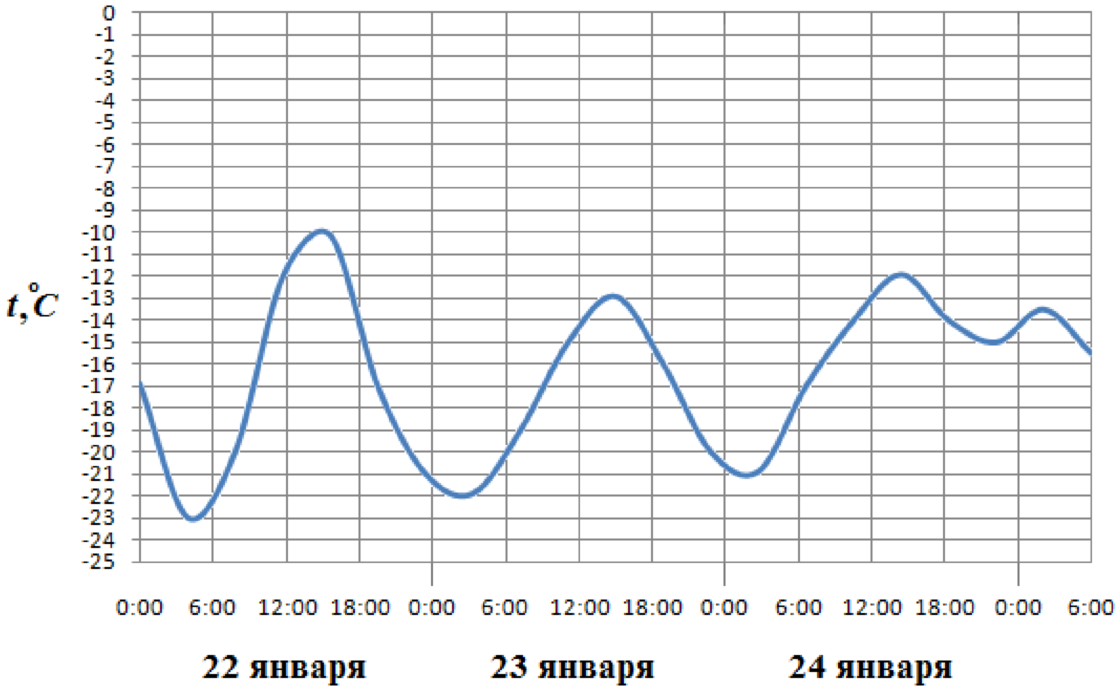
Часть 1

Ответом на задания В1 — В15 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Стоимость проездного билета на месяц составляет 720 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 19 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 46 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

В2. В магазине «Сделай сам» вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 20% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 4000 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

В3. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 24 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



В4. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона (руб.)	Первоначальный взнос (в % от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа(руб.)
Эпсилон	20000	15	12	1620
Дельта	21000	10	6	3400
Омикрон	19000	20	12	1560

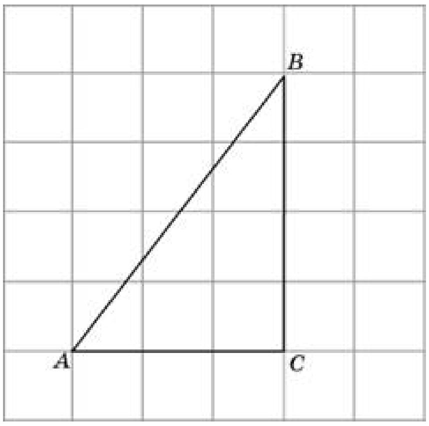
Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты). В ответ запишите эту сумму в рублях.

B5. Площадь треугольника ABC равна 12. DE — средняя линия этого треугольника, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABDE$.

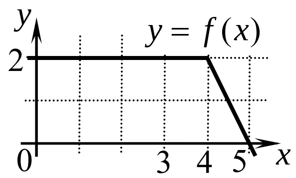
B6. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина **А**, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина **Б**, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

B7. Найдите корень уравнения $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

B8. Найдите радиус окружности, вписанной в изображенный на рисунке треугольник ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



B9. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(5)-F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



B10. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 38. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

B11. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

B12. Катер должен пересечь реку, ширина которой $L=90$ м, а скорость течения $u=1,5$ м/с, так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t=\frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha$, где α — острый угол, задающий направление движения катера (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 60 с?

B13. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$. Ответ дайте в градусах.

B14. Дорога между пунктами **А** и **В** состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 19 км. Турист прошёл путь из **А** в **В** за 13 часов. Время его движения на спуске составило 6 часов. С какой скоростью турист шёл на спуске, если скорость его движения на подъёме меньше скорости движения на спуске на 1 км/ч?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2(x+5)-1$ на отрезке $[-4;-1]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 — С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

С2. Отрезок *KM* — диаметр основания конуса, отрезок *AK* — образующая этого конуса, которая в 3 раза больше радиуса его основания. Хорда основания *ML* составляет с прямой *KM* угол $45°$. Через *AK* проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой *ML*. Найдите расстояние от центра основания конуса *O* до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x (x^3 - 8) \le \log_x (x^3 + 2x - 13), \\ \sqrt{2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^{x+1} + 10} \ge 3^x - 10. \end{cases}$$

С4. Дан равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Вписанная в него окружность с центром *O* касается боковой стороны *BC* в точке *P* и пересекает биссектрису угла *B* в точке *Q*.

а) Докажите, что отрезки *PQ* и *OC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *OBC*, если точка *O* делит высоту *BD* треугольника в отношении *BO*:*OD* = 3:1 и *AC* = 2*m*.

С5. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(\frac{3x^2+8}{x^2+2}\right) + \log_a\left(\frac{2x^2+6}{x^2+2}\right) > 1$ не имеет решений.

С6. Коля умножил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное *m*. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное *n*.

а) Может ли модуль разности чисел *m* и *n* равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел *m* и *n* равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел *m* и n?

Ответы к заданиям варианта №1

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**B7**	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**	**B13**	**B14**	**B15**
208	3630	13	3010	44	0, 0066	4	1,5	7	74	5	45	45	4	5

C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**
а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{15}}$	$[\log_2 3; +\infty)$	б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$1 < a \le 8$	а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

Ответы к заданиям варианта №2

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**B7**	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**	**B13**	**B14**	**B15**
154	4800	9	22 440	9	0,02	6	1	3	57	$-0,5$	45	45	2	-1

C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**
а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$.	$\frac{4}{\sqrt{34}}$	$[2,5;+\infty)$	б) $\frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$	$0<a<1$ или $a\geq 12$.	а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

Решения и критерии оценивания выполнения заданий С1 — С6.

Вариант 1

С1. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow 6(1-\cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2},\\ \cos x = \frac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Условию $x \in \left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$ удовлетворяет только одно значение $x = -\frac{14\pi}{3}$.

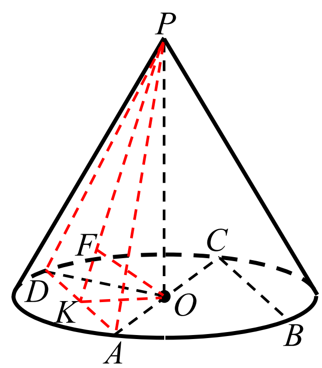
(Отбор корней может быть произведен и **обязательно показан** любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д.)

Ответ: а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания С1	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

С2. Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол $60°$. Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

Решение.



Пусть отрезок AD — хорда основания, параллельная BC. Тогда треугольник ADP — искомое сечение, так как плоскость ADP содержит прямую AP и прямую AD, параллельную BC. Опустим перпендикуляр PK на прямую AD. Согласно теореме о трех перпендикулярах OK также является перпендикуляром к AD, значит, $AD \perp (OPK)$. Высота OF треугольника OPK лежит в плоскости OPK, следовательно, $OF \perp AD$ и $OF \perp PK$, а, значит, $OF \perp (ADP)$.

Далее находим:

1) из условия $AD \parallel BC$: $\angle DAC = \angle BCA = 60°$;

2) из правильного треугольника AOD: $OK = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника APO: $PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3$;

4) из прямоугольного треугольника KPO: а) $KP = \sqrt{PO^2 + KO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$;

б) $OF = \frac{OK \cdot OP}{PK} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

Критерии оценивания выполнения задания С2	Баллы
В результате использования верных утверждений и формул получен верный ответ. Обоснование не содержит неверных утверждений	2
В результате использования верных утверждений и формул задача доведена до ответа, но получен неверный ответ в результате допущенной вычислительной ошибки или описки. Обоснование не содержит неверных утверждений *) Все промежуточные вычисления и полученный ответ верны, но обоснование отсутствует или содержит неверные утверждения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

*) **Критерии распространяются и на случай использования координатного метода**

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x(x^3-1) \le \log_x(x^3+2x-4), \\ \sqrt{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 3} \ge 2^x - 3. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы.

$$\log_x(x^3-1) \le \log_x(x^3+2x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 \le x^3 + 2x - 4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \ge 3, \\ x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 1{,}5.$$

Множество решений первого неравенства системы: $[1{,}5; +\infty)$.

Решим теперь второе неравенство системы.

Пусть $2^x = t > 0$ $(*)$, тогда данное неравенство принимает вид $\sqrt{3t^2 - 10t + 3} \ge t - 3$.

Область определения этого неравенства задается условием $3t^2 - 10t + 3 \ge 0$, откуда $t \le \frac{1}{3}$ или $t \ge 3$. При $t \le \frac{1}{3}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t \le \frac{1}{3}$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{3t^2 - 10t + 3} \ge t - 3, \\ t \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(3t-1) \ge (t-3)^2, \\ t \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(2t+2) \ge 0, \\ t \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow t \ge 3.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \le 3^{-1}, \\ 2^x \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\log_2 3, \\ x \ge \log_2 3. \end{array}\right.$$

Таким образом, множество решений второго неравенства: $(-\infty; -\log_2 3] \cup [\log_2 3; +\infty)$.

Принимая во внимание, что $1{,}5 = \log_2 2^{1{,}5} = \log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3$, находим решения данной системы: $x \ge \log_2 3$.

Ответ: $[\log_2 3; +\infty)$.

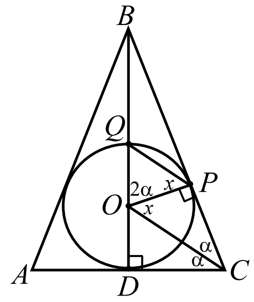
Критерии оценивания выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно решены оба неравенства системы, но не найдено или найдено неверно решение системы ИЛИ Решение доведено до конца, но получен неверный ответ в результате ОДНОЙ арифметической ошибки (описки)	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

С4. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO{:}OD = 3{:}1$ и $AC = 2a$.

Решение.



а) Пусть луч BO пересекает сторону AC в точке D. Введем следующие обозначения: $\angle BCO = \angle DCO = \alpha$, $\angle COP = x$. Тогда $\angle OPQ = x$, поскольку прямые OC и QP параллельны, а углы COP и OPQ — накрест лежащие при пересечении прямых PQ и OC секущей OP. Далее, из прямоугольного треугольника OPC находим $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а из равнобедренного треугольника OPQ находим $\angle POQ = \pi - 2x = 2\alpha$. Таким образом, треугольники BOP и BCD подобны, и, значит, биссектриса BD треугольника ABC является его высотой, откуда следует, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник, что и требовалось доказать

б) Отрезок CO — биссектриса треугольника BCD, следовательно, $DC : BC = OD : OB = 1:3$, откуда $BC = 3DC = 3a$. Далее: $CP = DC = a$, откуда $BP = 2a$ и, следовательно, $S_{\Delta BPO} = 2S_{\Delta CPO} = S_{CPOD}$. откуда $S_{\Delta BOP} = \frac{1}{2} S_{\Delta BCD} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$. Далее, поскольку $BQ = \frac{2}{3} BO$, то $S_{\Delta BQP} = \frac{2}{3} S_{\Delta BOP} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$. По формуле Герона находим $S_{\Delta ABC} = \sqrt{4a \cdot 2a \cdot a \cdot a} = 2a^2\sqrt{2}$, откуда $S_{\Delta OBC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания С4	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

С5. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(\frac{3+2x^4}{1+x^4}\right)+\log_a\left(\frac{5+4x^4}{1+x^4}\right)>1$ выполняется для всех действительных значений x.

Решение.

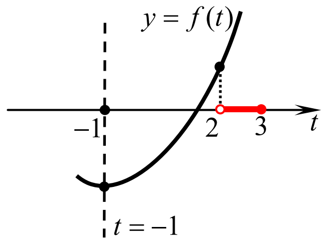
Заметим, что $\frac{3+2x^4}{1+x^4}=\frac{1+2(1+x^4)}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+2$ и, аналогично, $\frac{5+4x^4}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+4$.

Положим $t=\frac{1}{1+x^4}+2$. Поскольку $1\le 1+x^4<+\infty$ множеством значений выражения $\frac{1}{1+x^4}+2$ при $x\in\mathbb{R}$ является промежуток (2; 3]. Значит, неравенство $\log_a\left(\frac{3+2x^4}{1+x^4}\right)+\log_a\left(\frac{5+4x^4}{1+x^4}\right)>1$ выполняется для всех действительных значений x тогда и только тогда, когда на промежутке (2; 3] выполняется неравенство $\log_a t+\log_a(t+2)>1$. $(*)$

Далее имеем:

1) если $0<a<1$, то неравенство $(*)$ не имеет решений на промежутке (2; 3], так как на этом промежутке оба слагаемых левой части неравенства отрицательны;

2) если $a>1$, то неравенство $(*)$ равносильно неравенству
$t^2+2t-a>0$.
Функция $f(t)=t^2+2t-a$ должна быть положительна на промежутке (2; 3], значит, ее график должен быть расположен выше интервала (2; 3] оси абсцисс, т.е., должно выполняться условие $f(2)\ge 0$ (см.рисунок). Решая неравенство $8-a\ge 0$ с учетом условия $a>1$, окончательно получаем $1<a\le 8$.



Ответ: $1<a\le 8$.

<u>Замечание</u>. Пункт 2) можно выполнить иначе с помощью следующих рассуждений:

Поскольку вершина параболы $y=t^2+2t$ имеет координаты $(-1;y_0)$, функция $y=t^2+2t$ возрастает на промежутке (2; 3] и, значит, множеством ее значений на этом промежутке является промежуток $\left(y(2);y(3)\right]$, т.е. промежуток $(8;15]$. Таким образом, неравенство $t^2+2t-a>0$ верно для всех t из промежутка (2; 3] в том и только в том случае, когда выполняется условие $a\le 8$, откуда с учетом условия $a>1$, окончательно получаем $1<a\le 8$

Ответ: $1<a\le 8$.

Критерии оценивания выполнения задания C5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Обосновано получен ответ отличающийся от верного только исключением и/или включением ГРАНИЧНЫХ точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу	3
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a, возможно неверные, из-за неверной оценки введенной переменной t	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и отрезка $(2; 3]$ или (при аналитическом решении) найдено множество значений функции $y = t^2 + 2t$, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

C6. Петя множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное a. Вася умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное b.

а) Может ли модуль разности чисел a и b равняться 8?

б) Может ли модуль разности чисел a и b равняться 11?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел a и b?

Решение.

а) Да, например, Петя умножил 8 на 9, получив 72, а Вася умножил 8 на 10, получив 80. Модуль разности полученных произведений равен 8.

б) Заметим, что произведение последовательных чисел всегда четно, так как одно из них четно. Таким образом, Петино произведение будет четным. Васино же произведение четно в силу того, что он перемножает два четных числа. Значит, и модуль разности чисел a и b будет четным, таким образом, он не может быть равен 11.

в) Как было показано в пункте б) модуль разности будет четным. Покажем, что он не может быть равен нулю. Пусть Петя перемножал числа x и $x+1$, а Вася — числа y и $y+2$. Тогда, если модуль разности их произведений равен нулю, имеем:

$x(x+1) = y(y+2)$; $x^2 + x = y^2 + 2y$; $x^2 + x + 1 = (y+1)^2$. Заметим, что $x < y+1$, так как $x^2 < (y+1)^2$. С другой стороны, $y+1 < x+1$, так как $(y+1)^2 = x^2 + x + 1 < (x+1)^2$.

Итак, $x < y+1 < x+1$, но натуральное число не может лежать между двумя соседними натуральными числами. Значит, модуль разности не может равняться 0. Тогда он не меньше 2, так как четен.

Покажем, что он может принимать любое четное натуральное значение. Пусть Петя умножил четное число n на $n+1$, а Вася умножил n на $n+2$ Тогда модуль разности их произведений равен $n(n+2) - n(n+1) = n$. Так как n — любое четное натуральное число, то искомый модуль разности может принимать любое четное натуральное значение.

Ответ: а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

Критерии оценивания выполнения задания С6	**Баллы**
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — приведен верный пример в пункте *а*); — обоснованное решение пункта *б*); — доказательство невозможности равенства полученных произведений *в*); — доказательство того, что любое четное натуральное число является ответом на вопрос пункта *в*)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

Решения и критерии оценивания выполнения заданий С1 — С6.

Вариант 2

С1. а) Решите уравнение $4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) $4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1=0 \Leftrightarrow 4(1-\cos^2 x)-8\cos x+1=0 \Leftrightarrow$

$$4\cos^2 x+8\cos x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2},\\ \cos x=-\frac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

б) Условию $x\in\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ удовлетворяет только одно значение $x=-\frac{5\pi}{3}$.

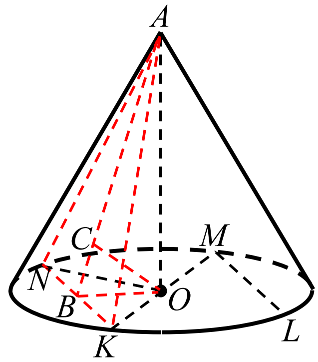
(Отбор корней может быть произведен и **обязательно показан** любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д.)

Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания С1	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

С2. Отрезок KM — диаметр основания конуса, отрезок AK — образующая этого конуса, которая в 3 раза больше радиуса его основания. Хорда основания ML составляет с прямой KM угол $45°$. Через AK проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой ML. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1..

Решение.



Пусть отрезок KN — хорда основания, параллельная ML. Тогда треугольник AKN — искомое сечение, так как плоскость AKN содержит прямую AK и прямую KN, параллельную ML. Опустим перпендикуляр AB на прямую KN. Согласно теореме о трех перпендикулярах OB также является перпендикуляром к KN, значит, $KN\perp(ABO)$. Высота OC треугольника ABO лежит в плоскости ABO, следовательно, $OC\perp AB$ и $OC\perp KN$, а, значит, $OC\perp(AKN)$.

Далее находим:

1) из условия $KN \parallel ML$: $\angle NKM=\angle KML=45°$;

2) из прямоугольного треугольника KON: $OB=\frac{KO\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника AKO: $AO^2 = AK^2 - KO^2 = 9R^2 - R^2 = 8$;

4) из прямоугольного треугольника ABO: а) $AB = \sqrt{OB^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$:

б) $OC = \frac{OB \cdot OA}{AB} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{34}} = \frac{4}{\sqrt{34}}$.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{34}}$.

Критерии оценивания выполнения задания С2	Баллы
В результате использования верных утверждений и формул получен верный ответ. Обоснование не содержит неверных утверждений	2
В результате использования верных утверждений и формул задача доведена до ответа, но получен неверный ответ в результате допущенной вычислительной ошибки или описки. Обоснование не содержит неверных утверждений *) Все промежуточные вычисления и полученный ответ верны, но обоснование отсутствует или содержит неверные утверждения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

*) **Критерии распространяются и на случай использования координатного метода**

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x(x^3 - 8) \le \log_x(x^3 + 2x - 13), \\ \sqrt{2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^{x+1} + 10} \ge 3^x - 10. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы.

$$\log_x(x^3 - 8) \le \log_x(x^3 + 2x - 13) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8 \le x^3 + 2x - 13, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \ge 5, \\ x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 2{,}5.$$

Множество решений первого неравенства системы: $[2{,}5; +\infty)$.

Решим теперь второе неравенство системы.

Пусть $3^x = t > 0$ $(*)$, тогда данное неравенство принимает вид $\sqrt{2t^2 - 21t + 10} \ge t - 10$.

Область определения этого неравенства задается условием $2t^2 - 21t + 10 \ge 0$, откуда $t \le \frac{1}{2}$ или $t \ge 10$. При $t \le \frac{1}{2}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t \le \frac{1}{2}$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{2t^2 - 21t + 10} \ge t - 10, \\ t \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-10)(2t-1) \ge (t-10)^2, \\ t \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-10)(t+9) \ge 0, \\ t \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow t \ge 10.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x \le 2^{-1}, \\ 3^x \ge 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\log_3 2, \\ x \ge \log_3 10. \end{array}\right.$$

Таким образом, множество решений второго неравенства: $(-\infty; -\log_3 2] \cup [\log_3 10; +\infty)$.

Принимая во внимание, что $2{,}5 = \log_3 3^{2{,}5} = \log_3 9\sqrt{3} > \log_3 10$, находим решения данной системы: $x \ge 2{,}5$.

Ответ: $[2{,}5; +\infty)$.

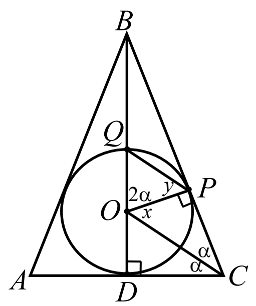
Критерии оценивания выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно решены оба неравенства системы, но не найдено или найдено неверно решение системы ИЛИ Решение доведено до конца, но получен неверный ответ в результате ОДНОЙ арифметической ошибки (описки)	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

С4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q.

а) Докажите, что отрезки PQ и OC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника OBC, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO:OD = 3:1$ и $AC = 2m$.

Решение.



а) Пусть отрезок BD — высота данного треугольника. Тогда $O \in BD$, так как ABC — равнобедренный треугольник. Введем следующие обозначения: $\angle BCO = \angle DCO = \alpha$, $\angle COP = x$, $\angle OPQ = y$. Поскольку прямоугольные треугольники BOP и BCD подобны, $\angle BOP = 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника OPC находим $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а из равнобедренного треугольника OPQ находим $y = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поскольку углы COP и OPQ — накрест лежащие при пересечении прямых PQ и OC секущей OP, то отрезки PQ и OC параллельны, что и требовалось доказать.

б) Отрезок CO — биссектриса треугольника BCD, следовательно, $DC : BC = OD : OB = 1:3$, откуда $BC = 3DC = 3m$. Далее: $CP = DC = m$, откуда $BP = 2m$ и, следовательно, $S_{\Delta BPO} = 2S_{\Delta CPO} = 2S_{\Delta CDO}$, откуда $S_{\Delta OBC} = \frac{3}{4} S_{\Delta BCD} = \frac{3}{8} S_{\Delta ABC}$. По формуле Герона находим $S_{\Delta ABC} = \sqrt{4m \cdot 2m \cdot m \cdot m} = 2m^2\sqrt{2}$, откуда $S_{\Delta OBC} = \frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания С4	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

C5. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(\frac{3x^2+8}{x^2+2}\right)+\log_a\left(\frac{2x^2+6}{x^2+2}\right)>1$ не имеет решений.

Решение.

Заметим, что $\frac{3x^2+8}{x^2+2}=\frac{2+3(x^2+2)}{x^2+2}=\frac{2}{x^2+2}+3$ и, аналогично, $\frac{2x^2+6}{x^2+2}=\frac{2}{x^2+2}+2$.

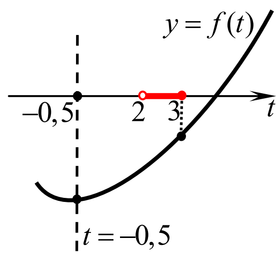
Положим $t=\frac{2}{x^2+2}+2$. Поскольку $2\le x^2+2<+\infty$ множеством значений выражения $\frac{2}{x^2+2}+2$ при $x\in\mathbb{R}$ является промежуток $(2;\,3]$. Значит, неравенство $\log_a\left(\frac{3x^2+8}{x^2+2}\right)+\log_a\left(\frac{2x^2+6}{x^2+2}\right)>1$ не имеет решений тогда и только тогда, когда на промежутке $(2;\,3]$ не имеет решений неравенство $\log_a(t+1)+\log_a t)>1$. $\quad(*)$

Далее имеем:

1) при $0<a<1$ неравенство $(*)$ не имеет решений на промежутке $(2;3]$, так как на этом промежутке оба слагаемых левой части неравенства отрицательны;

2) при $a>1$ неравенство $(*)$ равносильно неравенству $t^2+t-a>0$.

Функция $f(t)=t^2+t-a$ должна быть неположительна на промежутке $(2;3]$, значит, ее график должен быть расположен не выше интервала $(2;3]$ оси абсцисс, т.е., должно выполняться условие $f(3)\le 0$. Решая неравенство $12-a\le 0$, получаем $a\ge 12$.



Ответ: $0<a<1$, $a\ge 12$.

<u>Замечание</u>. Пункт 2) можно выполнить иначе с помощью следующих рассуждений:

Поскольку вершина параболы $y=t^2+t$ имеет координаты $(-0,5;y_0)$, функция $y=t^2+t$ возрастает на промежутке $(2;3]$ и, значит множеством ее значений на этом промежутке является промежуток $\left(y(2);y(3)\right]$, т.е. промежуток $(6;\,12]$. Таким образом, неравенство $t^2+t>a$ неверно для всех t из промежутка $(2;3]$ в том и только в том случае, когда выполняется условие $a\ge 12$.

Ответ: $0<a<1$, $a\ge 12$.

Критерии оценивания выполнения задания С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Обосновано получен ответ отличающийся от верного только исключением и/или включением ГРАНИЧНЫХ точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу	3
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a, возможно неверные, из-за неверной оценки введенной переменной t	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и отрезка (2; 3] или (при аналитическом решении) найдено множество значений функции $y = t^2 + t$, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

С6. Коля множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное m. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное n.

а) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел m и n?

Решение.

а) Да, например, Коля умножил 6 на 7, получив 42, а Вова умножил 6 на 8, получив 48. Модуль разности полученных произведений равен 6.

б) Заметим, что произведение последовательных чисел всегда четно, так как одно из них четно. Таким образом, Колино произведение будет четным. Вовино же произведение четно в силу того, что он перемножает два четных числа. Значит, и модуль разности чисел a и b будет четным, таким образом, он не может быть равен 13.

в) Как было показано в пункте б) модуль разности будет четным. Покажем, что он не может быть равен нулю. Пусть Коля перемножал числа x и $x+1$, а Вова — числа y и $y+2$. Тогда, если модуль разности их произведений равен нулю, имеем:

$x(x+1) = y(y+2)$; $x^2 + x = y^2 + 2y$; $x^2 + x + 1 = (y+1)^2$. Заметим, что $x < y+1$, так как $x^2 < (y+1)^2$. С другой стороны, $y+1 < x+1$, так как $(y+1)^2 = x^2 + x + 1 < (x+1)^2$.

Итак, $x < y+1 < x+1$, но натуральное число не может лежать между двумя соседними натуральными числами. Значит, модуль разности не может равняться 0. Тогда он не меньше 2, так как четен.

Покажем, что он может принимать любое четное натуральное значение. Пусть Коля умножил четное число n на $n+1$, а Вова умножил n на $n+2$ Тогда модуль разности их произведений равен $n(n+2) - n(n+1) = n$. Так как n — любое четное натуральное число, то искомый модуль разности может принимать любое четное натуральное значение.

Ответ: а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

Критерии оценивания выполнения задания С6	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — приведен верный пример в пункте *а*); — обоснованное решение пункта *б*); — доказательство невозможности равенства полученных произведений *в*); — доказательство того, что любое четное натуральное число является ответом на вопрос пункта *в*)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***