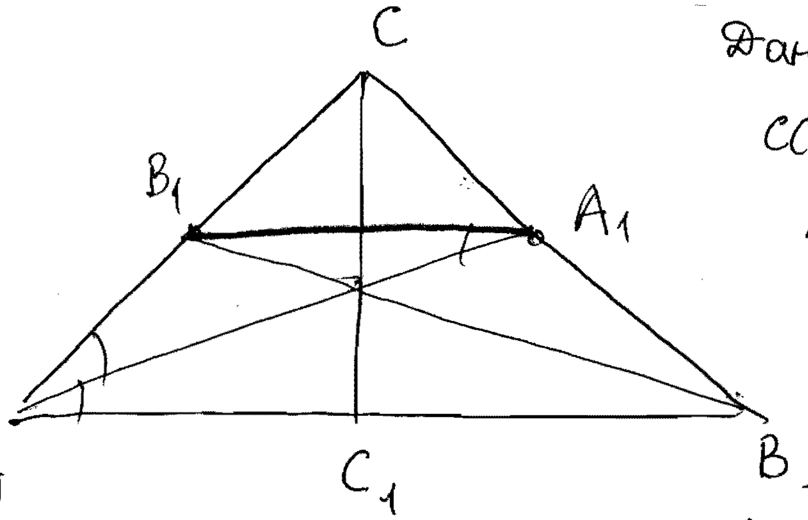

Дано: ΔABC - равнобедренный

CC_1 - медиана

AA_1 - биссектриса

$AA_1 = 2 \cdot CC_1$

$\angle ACB = ?$

Решение

Проведем биссектрису BB_1. Так как ΔACB - равнобедр., то $BB_1 = AA_1$. Соединим B_1 и A_1 – $[B_1A_1]$

Заметим, что $B_1A_1 \parallel AB$ (это можно доказать, но факт достаточно очевидный, – примем без доказательства)

Тогда $\angle B_1A_1A = \angle A_1AB$ - накрест лежащие при параллельных прямых. Но т.к. AA_1 биссектриса, то $\angle BAA_1 = \angle B_1A_1A \Rightarrow \Delta AB_1A_1$ - равнобедренный

$\Rightarrow AB_1 = B_1A_1 = a$

Заметим, что AB_1A_1B - равнобедренная трапеция.

Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle AB_1A_1 = 180^\circ - \alpha$

Тогда из ΔAB_1A_1 по теореме косинусов имеем:

$$AA_1^2 = AB_1^2 + B_1A_1^2 - 2 \cdot AB_1 \cdot B_1A_1 \cdot \cos \angle AB_1A_1$$

$$AA_1^2 = a^2 + a^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \cos\alpha = 2a^2(1+\cos\alpha) \quad (1)$$

~~Из Δ~~ CC_1 - медиана, но также высота $\Rightarrow$

~~$\angle B$~~ $\angle CC_1A = 90^\circ$. Тогда из ΔACC_1 имеем:

$$CC_1 = AC \cdot \sin\alpha \quad (2)$$

$$AC_1 = AC \cdot \cos\alpha \quad (3)$$

По свойству биссектрисы для ΔABC заметим! ②

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{CB}$$

$$B_1C = AC - AB_1 = AC - a$$

$$AB = 2 \cdot AC_1 = 2AC \cdot \cos\alpha \quad (\text{см } 3)$$

$$CB = AC$$

$$\Rightarrow \frac{a}{AC-a} = \frac{2 \cdot AC \cdot \cos\alpha}{AC} \Rightarrow \frac{a}{AC-a} = 2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow AC = \frac{a}{2\cos\alpha} + a = \frac{a(1+2\cos\alpha)}{2\cos\alpha} \qquad (4)$$

Подставим (4) в (2) – получим:

$$CC_1 = \frac{a(1+2\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}{2\cos\alpha} \qquad CC_1^2 = \frac{a^2\cdot\sin^2\alpha\,(1+2\cos\alpha)^2}{4\cos^2\alpha}$$

По условию задачи

$$\frac{AA_1}{CC_1} = 2 \Rightarrow \frac{AA_1^2}{CC_1^2} = 4 \Rightarrow \frac{2a^2(1+\cos\alpha)\cdot 4\cos^2\alpha}{a^2\cdot\sin^2\alpha\,(1+2\cos\alpha)^2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2(1+\cos\alpha)\cdot\cos^2\alpha}{(1-\cos^2\alpha)(1+2\cos\alpha)^2} = 1 \Rightarrow \frac{2\cdot\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+4\cos\alpha+4\cos^2\alpha)$$

ОДЗ: $\cos\alpha \neq 1$ $\quad \cos\alpha \neq -\frac{1}{2}$ (но $\cos\alpha = 1$ не может быть, так как $\alpha \neq 0°$, а $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ означает, что α – тупой, что также не может быть, так 2-х тупых углов в одном треугольнике не может быть)

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 - 4\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + \cos\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha - 1 = 0 \quad (5)$$

Пусть $\cos\alpha = x$

Тогда ур-ние (5) запишем так:

$$2x^2 - 3x + 4x^3 - 1 = 0 \quad (6)$$

Если $x = -1$, то получим

$2+3-4-1=0$ – верное равенство

$\Rightarrow$ один из корней уравнения (6) $x_1 = -1$.

Значит левая часть уравнения (6) ~~разл~~ раскладывается на сомножители $(x+2)$ и еще какой-то. Найдем его, поделив ~~на~~ левую часть уравнения (6) на $(x+1)$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+2x^2-3x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^3+4x^2} & 4x^2-2x-1 \\ \quad -2x^2-3x & \\ \quad \underline{-2x^2-2x} & \\ \qquad -x-1 & \end{array}$$

Найдем корни уравнения $4x^2-2x-1=0$

$D = 4+16 = 20 \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{5}$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

Заметим, что из всех корней $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ и $x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ только x_2 является положительным

Поскольку x_1 и x_3 являются отрицательными числами, то эти корни решением данной задачи быть не могут, так как угол α может быть только острым, а отрицательные значения $\cos\alpha$ соответствуют только тупым углам.

Итак имеем единственное решение

$$\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad (7)$$

Заметим что $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$

$$\Rightarrow \cos\angle ACB = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$-\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{16}\cdot(1+\sqrt{5})^2 =$$

$$= 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{8} = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\angle ACB = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \boxed{\angle ACB = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}$$