

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$

ОДЗ.

$$x \neq 0 \quad (1)$$

дроби к общему знаменателю.

$$\left(\frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$

сложение

$$\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$

По свойству степеней.

$$\frac{(2x^2 - 1)^2}{x^2} + 2x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$

$$2x - 4 + \frac{(2x^2 - 1)^2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$$

группируем.

$$(2x - 4) + \frac{(2x^2 - 1)^2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$$

к общему знаменателю.

$$\frac{(2x - 4)x^2}{x^2} + \frac{(2x^2 - 1)^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 0$$

сложение.

$$\frac{(2x - 4)x^2 + (2x^2 - 1)^2 + x}{x^2} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$(2x - 4)x^2 + (2x^2 - 1)^2 + x = 0$$

Случай 1 : $x=0$.

$$(2 \cdot 0 - 4)0^2 + (2 \cdot 0^2 - 1)^2 + 0 = 0$$

$1=0$ - нет решений.

Случай 2 : $x \neq 0$.

$$(2x-4)x^2 + (2x^2-1)^2 + x = 0$$

$$((2x-4)x^2 + x) + (2x^2-1)^2 = 0$$

Раскрываем скобки.

$$((2x^3 - 4x^2) + x) + (2x^2 - 1)^2 = 0$$

$$(2x^3 - 4x^2 + x) + (2x^2 - 1)^2 = 0$$

Выносим общий множитель.

$$x(2x^2 - 4x + 1) + (2x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x(2x^2 - 4x + 1) + (4x^4 - 4x^2 + 1) = 0$$

уравнение равносильно предыдущему.

$$1 \left(2 \left(x + \frac{1}{2x} \right) - 4 \right) + \left(4 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2} \right) - 4 \right) = 0$$

замена переменных.

Пусть $t = x + \frac{1}{2x}$

В результате .

$$1(2t-4) + (4(t^2-1)-4) = 0$$

$$(2t-4) + (4(t^2-1)-4) = 0$$

Раскрываем скобки.

$$2t-4+4(t^2-1)-4=0$$

$$2t-4-4+4(t^2-1)=0$$

$$2t-8+4(t^2-1)=0$$

$$2t-8+(4t^2-4)=0$$

$$2t-8+4t^2-4=0$$

Приводим подобные .

$$2t-12+4t^2=0$$

Изменяем порядок действий.

$$4t^2+2t-12=0$$

$$2t^2+t-6=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 2(-6)=49$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1=\frac{-1-7}{2\cdot 2}=-2; t_2=\frac{-1+7}{2\cdot 2}=1,5$$

Ответ вспомогательного уравнения: $t=-2; t=1,5$.

исходное уравнение сводится к уравнению

$$x+\frac{1}{2x}=-2; x+\frac{1}{2x}=1,5$$

решение исходного уравнения разбивается на отдельные случаи.

Случай 2.1 .

$$x+\frac{1}{2x}=-2$$

$$x+\frac{1}{2x}+2=0$$

$$x+2+\frac{1}{2x}=0$$

$$(x+2)+\frac{1}{2x}=0$$

$$\frac{(x+2)2x}{2x} + \frac{1}{2x} = 0$$

$$\frac{(x+2)2x+1}{2x} = 0$$

$$\frac{(x+2)(2x)+1}{2x} = 0$$

$$\frac{(2x^2+4x)+1}{2x} = 0$$

$$\frac{2x^2+4x+1}{2x} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$2x^2+4x+1=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 2\cdot 1=8$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ответ этого случая: } x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}; x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}.$$

Случай 2.2 .

$$x + \frac{1}{2x} = 1,5$$

$$x + \frac{1}{2x} - 1,5 = 0$$

$$x - 1,5 + \frac{1}{2x} = 0$$

$$(x-1,5) + \frac{1}{2x} = 0$$

$$\frac{(x-1,5)2x}{2x} + \frac{1}{2x} = 0$$

$$\frac{(x-1,5)2x+1}{2x}=0$$

$$\frac{(x-1,5)(2x)+1}{2x}=0$$

$$\frac{(2x^2-3x)+1}{2x}=0$$

$$\frac{2x^2-3x+1}{2x}=0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$2x^2-3x+1=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{3-1}{2\cdot 2}=0,5; x_2=\frac{3+1}{2\cdot 2}=1$$

ответ этого случая: $x=0,5; x=1$.

Ответ этого уравнения: $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}; x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}; x=0,5; x=1$.

проверка ОДЗ.

$x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет ОДЗ.

$x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет ОДЗ.

$x=0,5$ удовлетворяет ОДЗ.

$x=1$ удовлетворяет ОДЗ.

Окончательный ответ: $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}; x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}; x=0,5; x=1$.