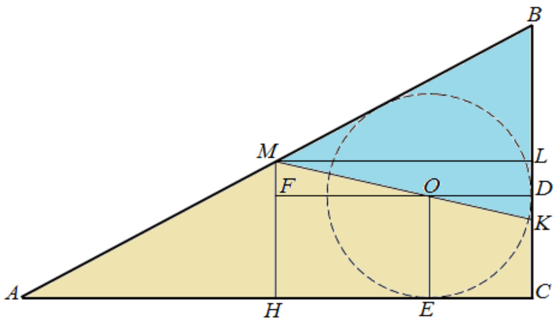
Длины катетов прямоугольного треугольника равны 12см и 5см. Найдите расстояние между центрами вписанной в этот треугольник окружности и описанной вокруг него окружности. Найдите так же отношение площадей фигур, на которые прямая, проходящая <u>между центрами</u> этих окружностей, делит треугольник.

Естественно, не <u>между центрами</u>, а через центры, т.к. прямую <u>между центрами</u> однозначно определить невозможно.
Итак, $AC = 12$ см, $BC = 12$ см. Найдём длину гипотенузы (теорема Пифагора): $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см.
Центр окружности, описанной около треугольника ABC – это точка M – середина гипотенузы, и радиус этой окружности $R = MA = MB = 0{,}5 \cdot AB = 6{,}5$ см. Саму описанную около треугольника ABC окружность рисовать нет никакого смысла, как, впрочем, и вписанную в него окружность. Достаточно обозначить точки касания D и E вписанной окружности с катетами BC и AC соответственно и её центр O.



Радиус окружности, вписанной в прямоугольный ΔABC определяется по формуле:
$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{12 + 5 - 13}{2} = 2 \text{ см.}$$
Раньше я находил расстояние между центрами M и O описанной и вписанной окружностей по формуле Эйлера: $MO = d = \sqrt{R(R-2r)} = \sqrt{6{,}5 \cdot (6{,}5 - 4)} = \sqrt{16{,}25}$ см, но сомневаюсь, что сейчас в школе проходят эту формулу. К счастью, в случае прямоугольных треугольников легко обойтись и без этой формулы.
Легко видеть, что $ODCE$ – квадрат со стороной, равной радиусу $r = 2$ см вписанной окружности. Через точку M проведём перпендикуляр к AC. Т.к. $MH \parallel BC$, то MH – средняя линия треугольника ABC и $MH = 0{,}5BC = 2{,}5$ см, $CH = AH = 0{,}5AC = 6$ см. Продолжим OD до пересечения с MH в точке F. Получим прямоугольник $OFHE$, у которого $FH = OE = 2$ см, $FO = HE = CH - CE = 6 - 2 = 4$ см.

$MF = MH - FH = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$ см. По теореме Пифагора
$$MO = \sqrt{FO^2 + MF^2} = \sqrt{4^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{16{,}25} \text{ см.}$$
Продолжим отрезок MO до пересечения с катетом BC в точке K. Треугольник ABC разделится на треугольник MBK площадью S_1 и четырёхугольник $AMKC$ площадью S_2. За основание треугольника MBK возьмём BK, тогда его высота $ML = 6$ см, как средняя линия треугольника ABC. $BD = BC - CD = 5 - 2 = 3$ см.
$\Delta KOD \sim \Delta MOF$ (они прямоугольные, и $\angle KOD = \angle MOF$ как вертикальные). Поэтому $\frac{KD}{MF} = \frac{OD}{OF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow RD = \frac{1}{2}MF = 0{,}25$ см. $BK = BD + KD = 3 + 0{,}25 = 3{,}25$ см.
$S_1 = \frac{BK \cdot ML}{2} = \frac{3{,}25 \cdot 6}{2} = 9{,}75$ см^2. $S_2 = S_{\Delta ABC} - S_1 = \frac{AC \cdot BC}{2} - 9{,}75 = \frac{12 \cdot 5}{2} = 20{,}25$ см^2.
$$S_1 : S_2 = 9{,}75 : 20{,}25 = 13 : 27$$