

$$1) \left| |4 - x^2| - x^2 \right| = 1$$

По определению модуля

$$|a| \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$$

$4 - x^2$ — это парабола, ветви вниз, определяем знаковые интервалы

$$1) x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$

$$\text{При этих значениях } |4 - x^2| = -4 + x^2$$

Исходное выражение принимает вид

$$|-4 + x^2 - x^2| = 1$$

$$|-4| = 1$$

Равенство неверное, следовательно, на рассматриваемой области решений нет.

$$2) x \in [-2; 2]$$

$$\text{При этих значениях } |4 - x^2| = 4 - x^2$$

Исходное выражение принимает вид

$$|4 - x^2 - x^2| = 1$$

$$|4 - 2x^2| = 1$$

$4 - 2x^2$ — это парабола с корнями $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, ветви вниз, определяем знаковые интервалы

$$a) x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$$

$$\text{При этих значениях } |4 - 2x^2| = -4 + 2x^2$$

Исходное выражение принимает вид

$$-4 + 2x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{2.5}$$

Оба корня принадлежат рассматриваемому интервалу.

$$б) x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\text{При этих значениях } |4 - 2x^2| = 4 - 2x^2$$

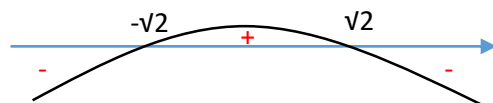
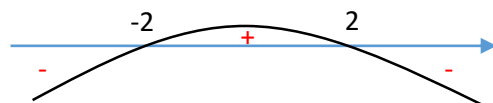
Исходное выражение принимает вид

$$4 - 2x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1.5}$$

Оба корня принадлежат рассматриваемому интервалу.

Ответ: $-\sqrt{2.5}$; $-\sqrt{1.5}$; $\sqrt{1.5}$; $\sqrt{2.5}$



$$2) \frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1$$

Находим точки, в которых знаменатель равен нулю.

$$|x-1|-1=0$$

$$|x-1|=1$$

$$x_1=2$$

$$x_2=0$$

Таким образом, область определения

$$(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$$

Находим точки в которых выражения под знаком модуля меняют свои знаки.

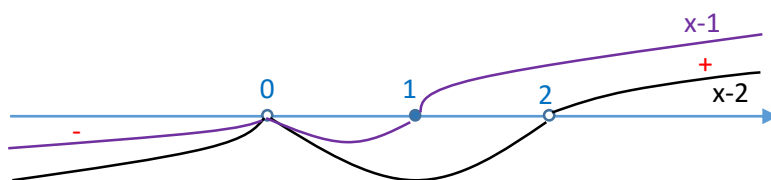
$$a) x-2=0$$

$$x=2$$

$$b) x-1=0$$

$$x=1$$

Определяем знаки интервалов



1) При $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

$$\begin{cases} |x-2| = -x+2 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$$

Исходное выражение принимает вид

$$\frac{-x+2}{-x+1-1} = 1$$

$$\frac{-x+2}{-x} = 1$$

$$-x+2 = -x$$

$$2 = 0$$

Получено неверное равенство, значит, на рассматриваемой области решений нет.

2) При $x \in [1; 2)$

$$\begin{cases} |x-2| = -x+2 \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$$

Исходное выражение принимает вид

$$\frac{-x+2}{x-1-1} = 1$$

$$-x+2 = x-2$$

$$x = 2$$

Не принадлежит рассматриваемой области.

3) При $x \in (2; \infty)$

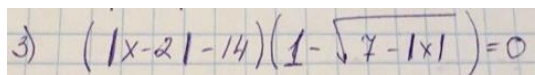
$$\begin{cases} |x - 2| = x - 2 \\ |x - 1| = x - 1 \end{cases}$$

Исходное выражение принимает вид

$$\frac{x - 2}{x - 1 - 1} = 1$$
$$1 = 1$$

Получено верное равенство, не зависящее от x . Это значит, любой x из рассматриваемой области является решением.

Ответ: $x \in (2; \infty)$



Выражение под знаком корня должно быть неотрицательным

$$7 - |x| \geq 0$$

$$|x| \leq 7$$

$$-7 \leq x \leq 7$$

Область определения: $[-7; 7]$

Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

1)

$$|x - 2| - 14 = 0$$

$$|x - 2| = 14$$

$$x_1 = -12$$

$$x_2 = 16$$

Оба корня не принадлежат области определения

2)

$$1 - \sqrt{7 - |x|} = 0$$

$$\sqrt{7 - |x|} = 1$$

$$7 - |x| = 1$$

$$|x| = 6$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 6$$

Оба корня принадлежат области определения

Ответ: -6; 6

$$4) \sqrt{(x+3)^2 + 4} + 4|x+3| = 0$$

Если корень равен нулю, то нулю равно и подкоренное выражение

$$(x+3)^2 + 4 + 4|x+3| = 0$$

$$4|x+3| = -(x+3)^2 - 4$$

Выражение в левой части неотрицательно, а выражение в правой части отрицательно. Такое равенство невозможно.

Ответ: решений нет

$$5) (3x-1)^2 - 5|12x^2 + 17x - 7| + 4(4x+7)^2 = 0$$

Находим точки, в которых выражение под знаком модуля меняет знак

$$12x^2 + 17x - 7 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-7) = 625$$

$$x_1 = \frac{-17 - \sqrt{625}}{2 \cdot 12} = -1.75$$

$$x_2 = \frac{-17 + \sqrt{625}}{2 \cdot 12} = \frac{1}{3}$$

Определяем знаки интервалов



1)

$$x \in (-\infty; -1.75] \cup [\frac{1}{3}; \infty)$$

При этих значениях $|12x^2 + 17x - 7| = 12x^2 + 17x - 7$

Исходное выражение принимает вид

$$(3x-1)^2 - 5(12x^2 + 17x - 7) + 4(4x+7)^2 = 0$$

$$9x^2 - 6x + 1 - 60x^2 - 85x + 35 + 64x^2 + 224x + 196 = 0$$

$$13x^2 + 133x + 232 = 0$$

$$D = 133^2 - 4 \cdot 13 \cdot 232 = 5625$$

$$\sqrt{D} = 75$$

$$x_1 = \frac{-133 - 75}{2 \cdot 13} = -8$$

$$x_2 = \frac{-133 + 75}{2 \cdot 13} = -\frac{29}{13}$$

2)

$$x \in (-1.75; \frac{1}{3})$$

При этих значениях $|12x^2 + 17x - 7| = -(12x^2 + 17x - 7)$

Исходное выражение принимает вид

$$(3x - 1)^2 + 5(12x^2 + 17x - 7) + 4(4x + 7)^2 = 0$$

$$9x^2 - 6x + 1 + 60x^2 + 85x - 35 + 64x^2 + 224x + 196 = 0$$

$$133x^2 + 303x + 162 = 0$$

$$D = 303^2 - 4 \cdot 133 \cdot 162 = 5625$$

$$\sqrt{D} = 75$$

$$x_1 = \frac{-303 - 75}{2 \cdot 133} = -\frac{27}{19}$$

$$x_2 = \frac{-303 + 75}{2 \cdot 13} = -\frac{6}{7}$$

Ответ: $-8; -\frac{29}{13}; -\frac{27}{19}; -\frac{6}{7}$