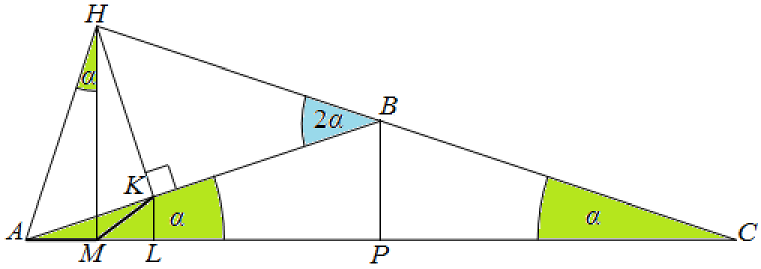
В равнобедренном тупоугольном треугольнике *ABC* на продолжение стороны *BC* опущена высота *AH*. Из точки *H* на сторону *AB* и основание *AC* опущены перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.

а) Доказать, что отрезки *AM* и *MK* равны.
б) Найти *MK*, если $AB=5$, $AC=8$.



а) *BP* – высота, медиана и биссектриса треугольника *ABC*. Пусть $AB=BC=a$. Тогда $PC=a\cos\alpha$, $BP=a\sin\alpha$. Площадь треугольника *ABC*: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AC\cdot BP}{2}=PC\cdot BP$ или $S_{\Delta ABC}=a^2\cos\alpha\sin\alpha$. С другой стороны $S_{\Delta ABC}=\dfrac{BC\cdot AH}{2}=\dfrac{a\cdot AH}{2}$, и

$$\frac{a\cdot AH}{2}=a^2\cos\alpha\sin\alpha \Leftrightarrow AH=2a\cos\alpha\sin\alpha=a\sin 2\alpha,$$

$$AM=AH\cdot\sin\alpha=a\sin 2\alpha\sin\alpha=2a\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

$$MP=AP-AM=a\cos\alpha-2a\sin^2\alpha\cos\alpha=a\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)=a\cos\alpha\cos 2\alpha.$$

$HM\perp AC\cap BP\perp AC\Rightarrow HM\parallel BP$, и по теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{HB}{MP}=\frac{BC}{PC}\Leftrightarrow\frac{HB}{a\cos\alpha\cos 2\alpha}=\frac{a}{a\cos\alpha}\Rightarrow HB=a\cos 2\alpha.$$

$\angle ABH=2\alpha$ как внешний угол треугольника *ABC*. $BK=HB\cos 2\alpha=a\cos^2 2\alpha$.

$$AK=AB-BK=a-a\cos^2 2\alpha=a\sin^2 2\alpha.$$

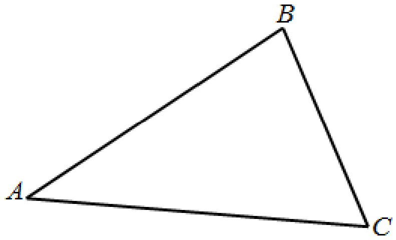
$$KL\perp AC\Rightarrow AL=AK\cdot\cos\alpha=a\cos^2 2\alpha\cos\alpha.$$

$\dfrac{AM}{AK}=\dfrac{2a\sin^2\alpha\cos\alpha}{a\sin^2 2\alpha}=\dfrac{2a\sin^2\alpha\cos\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{2\cos\alpha}=\dfrac{AB}{AC}$. Т.к. $\angle KAM=\angle BAC$, то $\Delta AMK\sim\Delta ABC$, и т.к. $AB=BC$, то $AM=MK$.

б) Найти *MK*, если $AB=5$, $AC=8$. Из доказанного выше $MK=2a\sin^2\alpha\cos\alpha$, где $a=5$, $\cos\alpha=\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{4}{5}$, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$.

$$MK=2\cdot 5\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{4}{5}=\frac{72}{25}=2{,}88$$

2. Треугольник *ABC* вписан в окружность радиуса 6 найдите длину хорды *AB*, если синус угла *ACB* равен 2/3.



По обобщённой теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin(\angle ACB)} = 2R$, где R – радиус описанной около треугольника *ABC* окружности. Отсюда $AB = 2R \cdot \sin(\angle ABC)$, и т.к. $R = 6$, $\sin(\angle ACB) = \dfrac{2}{3}$, то $AB = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{2}{3} = 8$.

1. Решить уравнение 4^x-1=4

Подобную запись можно понять двояко:

А) $4^x - 1 = 4$. Тогда $4^x = 5$ и $x = \log_4 5$.

Подозреваю, что вы логарифмы ещё не изучали (учебный год только начался), и Вы, скорее всего имели ввиду

Б) $4^{x-1} = 4$ или $4^{x-1} = 4^1$, $x - 1 = 1$ и $x = 2$.

В случае Б) в Знаниях Вы должны задавать свой вопрос так: 4^(x-1)=4. Тогда Вас поймут правильно. Можно писать условие от руки на листочке, листочек фотографировать или сканировать, а фото или скан прикреплять к вопросу. Еще лучше фотографировать условие с учебника (задачника) или освоить какой-либо редактор формул. Я с трудом представляю, как Вы будете без этого задавать вопросы по логарифмам!

2. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 100 меньше произведения двух других последовательных натуральных чисел. Рассмотреть возможные варианты.

Пусть $x < y$ и $y(y+1) - x(x+1) = 100$, т.е. $y^2 + y - (x^2 + x) = 100$; $y^2 - x^2 - y - x = 100$; $(y^2 - x^2) + (y - x) = 100$; $(y+x)(y-x) + (y-x) = 100$; $(y-x)(y+x+1) = 100$. Т.к. числа $y+x$ и $y-x$ одинаковой четности, то числа $y-x$ и $y+x+1$ разной четности, причем $y+x+1 > y-x$.

1) $\begin{cases} y+x+1=100 \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x=99 \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=100 \\ x=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50 \\ x=49 \end{cases}$, $50\cdot 51 - 49\cdot 50 = 100$.

2) $\begin{cases} y+x+1=50 \\ y-x=2 \end{cases}$. Невозможно, т.к. $y-x$ и $y+x+1$ разной четности.

3) $\begin{cases} y+x+1=25 \\ y-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x=24 \\ y-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=28 \\ x=y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14 \\ x=10 \end{cases}$. $14\cdot 15 - 10\cdot 11 = 100$.

4) $\begin{cases} y+x+1=20 \\ y-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x=19 \\ y-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=24 \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=7 \end{cases}$. $12\cdot 13 - 7\cdot 8 = 100$.

5) $\begin{cases} y+x+1=10 \\ y-x=10 \end{cases}$. Невозможно, т.к. $y+x+1 > y-x$.

Рассмотрены все случаи.

Ответ: 1) 50, 51 и 49, 50; 2) 14, 15 и 10, 11; 3) 12, 13 и 7, 8.