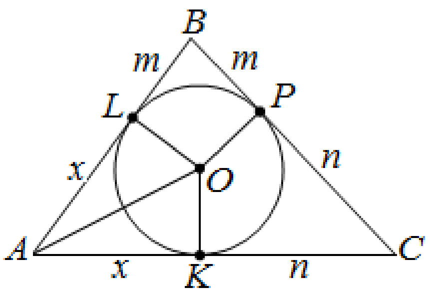


Известен угол $A$ и известно, что $BP = m$ и $PC = n$. $O$ – центр вписанной окружности (точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$). $K$, $L$ и $P$ – точки касания вписанной окружности со сторонами $AC$, $AB$ и $BC$ соответственно.

По теореме о касательных к окружности из одной точки $LB = BP = m$, $KC = PC = n$, $AL = AK = x$. Тогда $AB = x + m$; $AC = x + n$; $BC = m + n$. Пусть $S$ – площадь треугольника $ABC$.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2}(x+m)(x+n) \cdot 2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}(x+m)(x+n) \quad (1).$$

С другой стороны, $S = pr$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = x + m + n$, а $r$ – радиус вписанной окружности. $r = OL$; $\dfrac{OL}{AL} = tg\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \dfrac{r}{x} = tg\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow r = x \cdot tg\dfrac{A}{2}$ и

$$S = (x+m+n)x \cdot tg\frac{A}{2} \qquad (2).$$

Из (1) и (2):

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}(x+m)(x+n) = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} x(x+m+n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}(x+m)(x+n) = x(x+m+n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}x^2 + \cos^2\frac{A}{2}(m+n)x + \cos^2\frac{A}{2}mn = x^2 + (m+n)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \cos^2\frac{A}{2}\right)x^2 + \left(1 - \cos^2\frac{A}{2}\right)(m+n)x - mn\cos^2\frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}x^2 + \sin^2\frac{A}{2}(m+n)x - mn\cos^2\frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m+n)x - mnctg^2\frac{A}{2} = 0.$$

Отсюда: $x = \dfrac{-(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 + 4mnctg^2\frac{A}{2}}}{2}$, и т.к. $x > 0$, то

$$x = \frac{-(m+n) + \sqrt{(m+n)^2 + 4mnctg^2\frac{A}{2}}}{2} \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) или (2), получим выражение для площади треугольника $ABC$ через угол $A$ и отрезки $m$ и $n$.