3) На длинной полоске бумаги выписаны натуральные числа 1, 2, 3, …, N. Полоску разрезали на пять частей и нашли среднее арифметическое чисел на каждой части. Получились числа

10,5; 25,5; 53; 113 и 175,5

в некотором порядке. Найдите N.

Не помню, как решал товарищ до это, ну из спортивного интереса попробуем решить самостоятельно.

Значит так. Пусть полученные кусочки заканчиваются числами:

m1, m2, m3, m4, N;

А начинаются:

1, m1+1, m2+1, m3+1, m4+1.

При этом:

$$1<m_1<m_2<m_3<m_4<N$$

«Кусочки» полоски выглядят примерно так:

$$\begin{array}{l} [1,\ 2,\ldots,m_1]\ \ 1-й \\ [m_1+1,\ m_1+2,\ldots,m_2]\ \ 2-й \\ [m_2+1,\ m_2+2,\ldots,m_3]\ \ 3-й \\ [m_3+1,\ m_3+2,\ldots,m_4]\ \ 4-й \\ [m_4+1,\ m_4+2,\ldots,N]\ \ 5-й \end{array} \quad (1)$$

Соответственно средние арифметические чисел на кусочках.

$$s_1=\frac{\sum_{j=1}^{m_1} j}{m_1}$$

$$s_2=\frac{\sum_{j=m_1+1}^{m_2} j}{m_2-m_1} \quad (2)$$

$$s_3=\frac{\sum_{j=m_2+1}^{m_3} j}{m_3-m_2}$$

$$s_4 = \frac{\sum_{j=m_3+1}^{m_4} j}{m_4 - m_3} \quad (2)$$

$$s_5 = \frac{\sum_{j=m_4+1}^{N} j}{N - m_4}$$

Ну начнем по порядку.

$$s_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} j}{m_1} = 10{,}5 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{m_1} j = 10{,}5\, m_1 \quad (4)$$

Сумма слева в (4) есть сумма m_1 членов арифметической прогрессии (1й член которой равен 1, а «последний» m_1). Тогда (4) можно переписать в виде:

$$(m_1 + 1)\frac{m_1}{2} = 10{,}5\, m_1 \quad (5)$$

А отсюда уже можно найти m_1.

$$(m_1 + 1)\frac{1}{2} = 10{,}5$$

$$m_1 + 1 = 21$$

$$m_1 = 20 \quad (6)$$

«Боремся» далее

$$s_2 = \frac{\sum_{j=m_1+1}^{m_2} j}{m_2 - m_1} = 25{,}5 \quad (7)$$

$$\sum_{j=m_1+1}^{m_2} j = 25{,}5(m_2 - m_1) \quad (8)$$

Сумма слева в (8) есть сумма m_2 - m_1 членов арифметической прогрессии (1й член которой равен m_1 +1, а «последний» m_2). Тогда (8) можно переписать в виде:

$$(m_1+1+m_2)\frac{m_2-m_1}{2}=25{,}5(m_2-m_1) \quad (9)$$

А отсюда уже можно найти m_2.

$$\frac{(m_1+1+m_2)}{2}=25{,}5$$

$$m_2=51-1-m_1$$

$$m_2=51-1-20=30 \quad (10)$$

Разбираем следующий кусок

$$s_3=\frac{\sum_{j=m_2+1}^{m_3} j}{m_3-m_2}=53 \quad (11)$$

$$\sum_{j=m_2+1}^{m_3} j=53(m_3-m_2) \quad (12)$$

Сумма слева в (12) есть сумма m_3 - m_2 членов арифметической прогрессии (1й член которой равен m_2 +1, а «последний» m_3). Тогда (12) можно переписать в виде:

$$(m_2+1+m_3)\frac{m_3-m_2}{2}=53(m_3-m_2)$$

$$\frac{m_2+1+m_3}{2}=53 \quad (13)$$

А отсюда уже можно найти m_3.

$$m_2+1+m_3=106$$

$$m_3=106-1-m_2=106-1-30=75$$

$$m_3=75 \quad (14)$$

Далее.

$$s_4=\frac{\sum_{j=m_3+1}^{m_4} j}{m_4-m_3}=113 \quad (15)$$

$$\sum_{j=m_3+1}^{m_4} j=113(m_4-m_3) \quad (16)$$

Сумма слева в (16) есть сумма $m_4 - m_3$ членов арифметической прогрессии (1й член которой равен m_3+1, а «последний» m_4). Тогда (16) можно переписать в виде:

$$(m_3+1+m_4)\frac{m_4-m_3}{2}=113(m_4-m_3)$$

$$m_3+1+m_4=226 \quad (17)$$

А отсюда уже можно найти m_4.

$$m_4=226-1-m_3=226-1-75=150$$

$$m_4=150 \quad (18)$$

Наконец находим N

$$s_5=\frac{\sum_{j=m_4+1}^{N} j}{N-m_4}=175{,}5 \quad (19)$$

$$\sum_{j=m_4+1}^{N} j=175{,}5(N-m_4) \quad (20)$$

Сумма слева в (20) есть сумма $N - m_4$ членов арифметической прогрессии (1й член которой равен m_4+1, а «последний» N). Тогда (20) можно переписать в виде:

$$(m_4+1+N)\frac{N-m_4}{2}=175{,}5(N-m_4)$$

$$m_4+1+N=351 \quad (21)$$

А отсюда уже можно найти N.

$$N=351-1-m_4=351-1-150=200$$

$$N=200 \quad (22)$$

Теперь собирая (6), (10), (14), (18), (22), можно сказать, что кусочки ленты будут выглядеть примерно так:

$[1,\ 2,\ldots,20]\ \ 1-й$
$[21,\ 22,\ldots,30]\ \ 2-й$
$[31,\ 32,\ldots,75]\ \ 3-й$
$[76,\ 77,\ldots,150]\ \ 4-й$
$[151,\ 152,\ldots,200]\ \ 5-й$

(можно проверить решение.)

ОТВЕТ: Искомое N=200.