

$$\sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \\ \sqrt{5x} > 0 \\ \log_x(\sqrt{5x}) \geq 0 \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x(\sqrt{5x}) \geq 0 \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases}$$

Преобразуем неравенство.

$$\log_x(\sqrt{5x}) \geq 0$$

$$\log_x(\sqrt{5x}) \geq \log_x(1)$$

Воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

$$\begin{cases} \sqrt{5x} \geq 1 \\ x > 1 \\ \sqrt{5x} \leq 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \begin{cases} \sqrt{5x} \geq 1 \\ x > 1 \\ \sqrt{5x} \leq 1 \\ x < 1 \end{cases} \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \sqrt{5x} \geq 1 \\ x > 1 \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$$\sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5)$$

Перенесем все в левую часть.

$$\sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} + \log_x(5) = 0$$

так как $1 < x$ нет решений

Случай 2.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \sqrt{5x} \leq 1 \\ x < 1 \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\log_x(5) \end{cases}$$

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ \sqrt{\log_x(\sqrt{5x})} = -\frac{1}{\log_5(x)} \end{cases}$$

Воспользуемся формулами перехода к новому основанию логарифма.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ \sqrt{\frac{\log_5(\sqrt{5x})}{\log_5(x)}} = -\frac{1}{\log_5(x)} \end{cases}$$

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$\log_5(\sqrt{5x}) = \frac{1}{2} \log_5(5x)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1 + \log_5(x))}{\log_5(x)}} = -\frac{1}{\log_5(x)} \end{cases}$$

Произведем замену переменных.

$$\begin{cases} a = \log_5(x) \\ x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ a \leq 0 \\ \frac{\frac{1}{2}(1+a)}{a} = \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$\frac{\frac{1}{2}(1+a)}{a} = \frac{1}{a^2} \longrightarrow \frac{a^2 + a - 2}{2a^2} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$a^2 + a - 2 = 0$$

Находим дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

Дискриминант положителен, значит уравнение имеет два корня.

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения.

$$a_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot 1} = -2; a_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot 1} = 1$$

Ответ вспомогательного уравнения: $a = -2; a = 1$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 2.1.

$$\begin{cases} a = \log_5(x) \\ x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ a \leq 0 \\ a = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \log_5(x) \\ x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ a = -2 \end{cases}$$

Произведем замену переменных.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ \log_5(x) = -2 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$\log_5(x) = -2$$

Преобразуем уравнение.

$$\log_5(x) + 2 = 0$$

$$\log_5(x) + \log_5(5^2) = \log_5(1)$$

$$\log_5(5^2 x) = \log_5(1)$$

Воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

$$5^2 x = 1$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ 5^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ 25x = 1 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ x = \frac{1}{25} \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{25} \\ x \leq \frac{1}{5} \end{cases}$$

Следующее уравнение эквивалентно предыдущей системе.

$$x = \frac{1}{25}$$

Итак, ответ этого случая:

$$x$$

$$\frac{1}{25}$$

Случай 2.2.

$$\begin{cases} a = \log_5(x) \\ x > 0 \\ x \leq \frac{1}{5} \\ a \leq 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

нет решений

ОТВЕТ:

$$x$$

$$\frac{1}{25}$$