Старков В.Н. “180 задачи по планиметрии”

СОДЕРЖАНИЕ

1. Различные виды треугольников

1.1. Метод координат

1. При каких угловых коэффициентах k прямая линия $y=2+kx$ разбивает треугольник с вершинами A(0,3), B(–3,3) и O(0,0) на части, площади которых относятся как 1:3?

Ответ: $k \in \left\{ -\frac{3}{2}, 2 \right\}$

2. При каких угловых коэффициентах k прямая линия $y=1+kx$ разбивает треугольник с вершинами A(0,2), B(–2,2) и O(0,0) на части, площади которых относятся как 1:4?

Ответ: $k \in \{-2; 3\}$

3. Пусть A(0,–1), B(–4,4) –две точки плоскости. Найдите множество значений функции P(x) – периметра треугольника ABM, где M–точка плоскости с координатами (x,0), а $x \in [0,3]$.

Ответ: $\left[5+\sqrt{41}, 5+\sqrt{10}+\sqrt{17}\right]$

4. Пусть A(0,–2), B(–5, 10) –две точки плоскости. Найдите множество значений функции P(x) – периметра треугольника ABM, где M–точка плоскости с координатами (x,0), а $x \in [0,4]$.

Ответ: $\left[15+5\sqrt{5}, 13+2\sqrt{5}+\sqrt{181}\right]$.

1.2. Углы и отрезки в треугольнике

5. Треугольник со сторонами a=4 и b=4 имеет площадь $2\sqrt{7}$. Найдите синус угла, противолежащего стороне b.

Ответ: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{8}}, \sqrt{\frac{7}{8}} \right\}$

6. В треугольнике ABC углы B и C соответственно равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$. Найдите длину стороны AC, если AB=$\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$

7. Дан треугольник ABC со сторонами AB=7, BC=5, AC=6. На сторонах BC и AC взяты точки D и E так, что DC=EC=3. Найти величину отрезка DE.

Ответ: DE=$6\sqrt{\frac{2}{5}}$.

8. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а гипотенуза равна c. Определить площадь круга, вписанного в треугольник.
Ответ: $\pi(p-c)^2$

9. Определить площадь прямоугольного треугольника по катету a и высоте h, опущенной на гипотенузу.

Ответ: $\dfrac{a^2h}{2\sqrt{a^2-h^2}}$

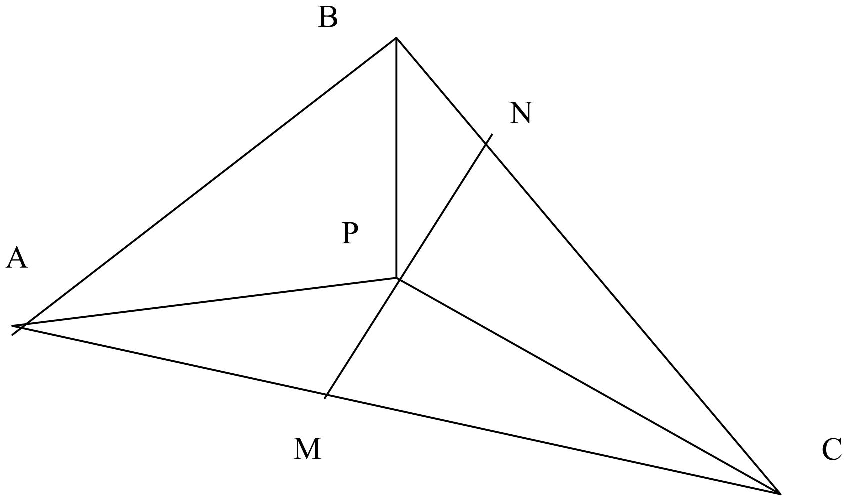
10. Внутри угла $\alpha=60^0$ взята точка M. Она удалена от его сторон на расстояния 3 и 4 см. Найдите ее расстояние от вершины угла.

Ответ: $2\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

11. В треугольнике ABC со сторонами AB=$\sqrt{6}$, AC=$\sqrt{7}$, BC=$\sqrt{8}$. На AB взята точка H и проведена прямая EH, параллельная основанию AC, так, что AH=BE. Найдите длину EH.
Ответ: EH=$2\sqrt{21}-3\sqrt{7}$

12. В ΔABC взяты точки: точка M – на стороне AC, точка N – на стороне BC и точка P – на отрезке MN, причем $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{MP}{PN}$. Найдите площадь ΔABC, если площади ΔAMP и ΔBNP равны 0,216 и 0,064 соответственно.
Ответ: 1

13. В ΔABC взяты точки: точка M – на стороне AC, точка N – на стороне BC и точка P – на отрезке MN, причем $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{MP}{PN}$. Найдите площадь ΔABC, если площади ΔAMP и ΔBNP равны 0,027 и 0,343 соответственно.
Решение**.** Построим треугольник.



Обозначим $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{MP}{PN}=\lambda$, тогда $AM=\lambda\cdot MC$, $CN=\lambda\cdot BN$, $MP=\lambda\cdot PN$.

Несколько раз воспользуемся известной формулой для площади треугольника $S=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$ (половина произведения сторон на синус угла между ними).

$S_{CMP}=\dfrac{1}{2}MP\cdot PC\cdot\sin\angle CPM$, $S_{CNP}=\dfrac{1}{2}NP\cdot PC\cdot\sin(\pi-\angle CPM)$. Их отношение дает $\dfrac{S_{CMP}}{S_{CNP}}=\dfrac{MP}{PN}=\lambda$.

Известно, что $S_{AMP}=T$, $S_{BNP}=Q$.

В тоже время $S_{AMP}=\frac{1}{2}AM\cdot PM\cdot\sin\angle AMP$, $S_{MPC}=\frac{1}{2}MC\cdot PM\cdot\sin(\pi-\angle AMP)$. Их отношение дает $\frac{S_{AMP}}{S_{MPC}}=\frac{AM}{MC}=\lambda$. Тогда $S_{MPC}=\frac{T}{\lambda}$.

Рассмотрим еще одну пару треугольников. $S_{BNP}=\frac{1}{2}BN\cdot NP\cdot\sin\angle BNP$, $S_{NPC}=\frac{1}{2}NC\cdot NP\cdot\sin(\pi-\angle BNP)$. Их отношение $\frac{S_{BNP}}{S_{NPC}}=\frac{1}{\lambda}$. Тогда $S_{NPC}=\lambda Q$.

Вернемся к отношению $\frac{S_{CMP}}{S_{CNP}}=\lambda$. Подставим выражения для площадей $\frac{T}{\lambda\cdot\lambda Q}=\lambda$. Получим $\lambda^3=\frac{T}{Q}$.

Для площади всего треугольника имеем $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\angle C$, кроме того $S_{CMN}=\frac{1}{2}MC\cdot NC\cdot\sin\angle C$.

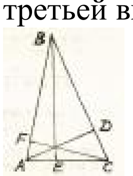
Теперь площадь треугольника выразилась $S_{ABC}=S_{CMN}\frac{BC\cdot AC}{MC\cdot NC}$. Известно, что $S_{CMN}=S_{CMP}+S_{CNP}=\frac{T}{\lambda}+\lambda Q$, $\frac{AC}{MC}=1+\frac{AM}{MC}=1+\lambda$, $\frac{BC}{NC}=1+\frac{BN}{NC}=1+\frac{1}{\lambda}$.

Тогда $S_{ABC}=\left(T+\lambda^2 Q\right)(1+\lambda)^2\frac{1}{\lambda^2}=Q(1+\lambda)^3$ или окончательно $S_{ABC}=Q\left(1+\sqrt[3]{\frac{T}{Q}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{T}+\sqrt[3]{Q}\right)^3$.

Ответ: $S_{ABC}=\left(\sqrt[3]{0,027}+\sqrt[3]{0,343}\right)^3=0,3+0,7=1$

Ответ: 1

14. В треугольнике даны стороны *a* и *b*, а сумма длин высот, опущенных на эти стороны, равна третьей высоте. Найдите третью сторону треугольника.



Решение. Пусть *ABC* — данный треугольник, *AC = b, BC = a, AD,BE, CP*—высоты треугольника (рис.). Обозначим *AB=x, AD=h*1 *BE=h*2, *CP =h*3. По условию *h*3 = *h*1+*h*2. Пусть S — площадь треугольника. Тогда 2S = *ah1=bh2=xh3,* поэтому 2S =xh3=x(h1+h2)=x(2S/a+2S/b) x(1/a+1/b)=1, x=ab/(a+b)

Ответ: длина третьей стороны равна ab/(a+b)

15. Найти углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два треугольника, каждый из которых также является равнобедренным.

Ответ: $\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5}$ или $\frac{\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{3\pi}{7}$

16. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Точка D находится на расстояниях *m* и *n* от катетов AC и BC соответственно. Найти длины катетов и гипотенузы.

Ответ: $\frac{m^2+n^2}{m}$, $\frac{m^2+n^2}{n}$, $\frac{\left(m^2+n^2\right)^{\frac{3}{2}}}{mn}$

17. В треугольнике даны три высоты 10, 1.2, 15. Найти угол треугольника, из вершины которого опущена большая высота.

Ответ: $\arccos\frac{3}{4}$

18. Длины сторон остроугольного треугольника равны a и b . Найти длину третьей стороны, если она равна длине проведенной к ней высоты. При каком соотношении a и b треугольник существует?

Ответ: третья сторона $x=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ при $a = b$ или $x=\sqrt{\frac{1}{5}\left(a^2+b^2+2\sqrt{3a^2b^2-\left(a^4+b^4\right)}\right)}$ при $\frac{2}{1+\sqrt{5}}\le\frac{a}{b}\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

19. В равнобедренном треугольнике ЛВС сторона АС = a. На стороне ВС лежит точка D, а на стороне АВ – точка Е так, что BD = a/3, АЕ = DE. Найдите длину СЕ.
Ответ: $13a/15$.

20. В правильном треугольнике АВС со стороной a проведена средняя линия MN параллельно АС Через точку А и середину MN проведена прямая до пересечения с ВС в точке D. Найдите длину AD.

Ответ: $\frac{a\sqrt{7}}{3}$

21. В треугольнике ABC: AB=2, AC=5, BC=6. Найдите расстояние от вершины В до точки пересечения высот треугольника D.

Ответ: $BD=\frac{25}{\sqrt{39}}$

22. Стороны треугольника пропорциональны целым *числам* m, $m+1$, $m+2$. При какой величине m наибольший угол треугольника вдвое больше наименьшего?
Ответ: $m=4$

23. Найти угол между высотой и медианой треугольника, проведенными из одной и той же вершины, зная углы α,β,γ .

Ответ: $\arccos\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sqrt{2\sin^2\alpha+2\sin^2\gamma-\sin^2\beta}}$

24. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник с периметром $2p$ так, что две его вершины принадлежат основанию, а две другие – боковым сторонам треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: $\frac{h(a-p)}{a-h}$, $\frac{h(p-h)}{a-h}$

25. В треугольнике АВС из вершины В проведены высота BD и биссектриса BE. Известно, что АС = 1, а величины углов ВЕС, ABD ABE, ВАС образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину стороны ВС и величины этих углов.
Ответ: ВС=0,5, углы 75°, 60°, 45°, 30°

26. В треугольнике АВС медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найти площадь треугольника АВС, если AM = m, BN = n.
Ответ: $2mn/3$

27. Пусть a и b –- две стороны треугольника, α – угол, между ними. Найти биссектрису этого угла.

Ответ: $\dfrac{2ab\cos\dfrac{\alpha}{2}}{a+b}$

28. В треугольнике ABC из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника, если BC = 3AC, угол ACB= α .

Ответ: $\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha}{3}+3}{6\cos\dfrac{\alpha}{3}+1}$

29. Две стороны треугольника равны a и b . Найти третью сторону треугольника, если его угол, лежащий против этой стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны *b*.
Ответ: $\sqrt{b(a+b)}$

30. Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC равна биссектрисе внешнего угла при вершине A и равна стороне AB. Найдите углы треугольника ABC.
Ответ: 1 случай 36^0, 36°, 108^0, 2 случай 132^0, 12^0, 36^0

31. В равнобедренном треугольнике ABC: AB = BC, медиана AD и биссектриса CE взаимно перпендикулярны. Определите величину угла ADB.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\arccos\sqrt{\dfrac{5}{8}}$

32. Через точку M основания AC треугольника ABC проведены прямые MN и MP, параллельные сторонам треугольника. Точки N и P пересечения этих прямых со сторонами треугольника соединены отрезком прямой. Найти площадь треугольника NBP, если площади треугольников ANM и MPC равны соответственно S_1, S_2 .

Ответ: $\sqrt{S_1S_2}$

33. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC - точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников OMA, OAB, OBN соответственно равны S_1, S_2, S_3

Ответ: $\dfrac{S_1S_3\left(S_1+S_2\right)\left(S_2+S_3\right)}{S_2\left(S_2^2-S_1S_3\right)}$

34. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части и каждая первая точка деления соединена с вершиной так, что образовался треугольник. Найдите отношение площадей исходного треугольника и полученного построением.
Ответ: 7

35. Угол при основании равнобедренного треугольника $\alpha \geq 45^0$, а площадь треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

Ответ: $-2S\cos^2\alpha\cos 2\alpha$

36. Дан треугольник ABC. Точка L – середина стороны BC, точка K – середина отрезка BL. На лучах AL и AK отложены вне треугольника ABC отрезки LD и KF, LD=AL, KF= AK/3. Вычислите отношение площадей треугольника ABC и четырехугольника KLDF.
Ответ: 12/5

37. Стороны AB, BC и CA треугольника ABC точками M, N и P разделены в одном и том же отношении так, что AM:MB = BN:NC = CP:PA. Найдите это отношение, если известно, что площадь треугольника MNP составляет 0,28 площади треугольника ABC.
Ответ: 3/2 или 2/3

38. Дан треугольник ABC. Точки M, N и P лежат на продолжениях стороны AB – за точку B, стороны BC – за точку C и стороны CA – за точку A, при этом BM = mAB, CN = nBC, AP = pAC. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.
Ответ: 1+m(p+1)+p(n+1)+n(m+1)

39. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные его сторонам. Эти прямые разделяют площадь треугольника на 6 частей, три из которых треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$

40. В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне BC, проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB. Площадь образовавшегося при этом параллелограмма составляет 5/18 площади треугольника ABC. Найдите, в каком отношении точка M делит сторону BC.
Ответ: 1:5 или 5:1

41. Равнобедренный треугольник с катетом a повернут вокруг вершины прямого угла на угол 30 градусов. Найдите площадь общей части исходного и повернутого треугольников.
Ответ: $a^2(2-\sqrt{3})$

42. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.
Ответ: 8
43. В треугольнике ABC угол B – острый. Точки D и E на катете CB расположены так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части, AD= a, AE= b. Найдите отношение площадей треугольников ADB и ABE.

Ответ: $\dfrac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2b}$

44. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол C–прямой) взята точка O так, что треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Найти длину OC, если известно, что $OA^2+OB^2=a^2$.

Ответ: OC=$\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

45. В треугольнике ABC угол при вершине C равен 60 градусов, BC= a, а отношение медианы, исходящей из вершины C, к AC равно m. Найти AC.

Ответ: $AC=\dfrac{1+\sqrt{16m^2-3}}{2(4m^2-1)}a$, $m>\dfrac{1}{2}$

46. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой, угол A равен 30° , а гипотенуза AB=c. Найти на катете BC точку M (указав ее расстояние до вершины B), обладающую тем свойством, что если MP перпендикуляр на гипотенузу, то прямоугольные треугольники MCA и MBP равновелики.
Ответ: $(\sqrt{2}-1)c$

47. Равнобедренный прямоугольный треугольник разбит на 3 части с одинаковыми периметрами прямыми, параллельными гипотенузе. Найти отношение площадей этих частей.

Ответ: $1:\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2+2\right):\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^4+2\left(\sqrt{2}-1\right)^2+2\right)$

48. Равносторонний треугольник разбит на 3 части с одинаковым периметром прямыми, перпендикулярными одной из его сторон. Найти отношение площадей этих частей.

Ответ: $1:\frac{8-3\sqrt{3}}{3}:1$

49. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AE. Найдите длину высоты AE, если известно, что AB=6, AD=BC=4.

Ответ: $3\sqrt{3}$

50. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD. Найти длину стороны AB, если известно, что AC=3, BD= $\sqrt{3}$ и AD=BC.

Ответ: $\sqrt{7}$

51. Две стороны треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к ним, перпендикулярны. Найдите третью сторону.

Ответ: $2\sqrt{5}$

52. В треугольнике ABC точки M, N и P расположены на сторонах AB, BC и AC соответственно Известно, что AM:BM=1:3, BN:NC=2:3, AP:PC=4:1, а площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника MNP.

Ответ: $\frac{19}{50}S$

53. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, длины сторон AB и AC относятся как 1:5. Средняя линия, параллельная BC, пересекает медиану и биссектрису, которые проведены из точки A, в точках M и N. Найти площадь треугольника AMN.

Ответ: $\frac{S}{12}$

54. Через некоторую точку внутри треугольника проведены прямые, параллельные сторонам. Площади треугольников, отсекаемых этими прямыми равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь исходного треугольника.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$

55. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) проведена медиана AD. Найти угол BAD, если угол при вершине B равен α.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}\right)$

56. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки a и b. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $S=\frac{a(a+b)}{2}\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}$

57. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника на расстоянии $a\sqrt{3}$ от двух его сторон и на расстоянии $b\sqrt{3}$ от третьей стороны. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $S=\sqrt{3}(b+2a)^2$

58. Найдите периметр треугольника ABC, если AB:BC:AC=m:n:l, а высота AH= h.

Ответ: $P=\frac{2nh\sqrt{m+n+l}}{\sqrt{(n+l-m)(m+l-n)(m+n-l)}}$

59. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны p и q. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $S=\frac{p+q}{2}\sqrt{pq}$

60. На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, взята точка E так, что DE=0,25BD. Через точку E проведена прямая AE, пересекающая сторону BC в точке F. Найдите площадь треугольника AFC.

Ответ: $\frac{2S}{5}$

61. В треугольнике ABC угол BAC равен 60 градусов. Внутри треугольника взята точка P так, что углы APB, BPC, CPA равны 120 градусов. Известно, что AP=a. Найдите площадь треугольника BPC.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2. Окружность и треугольник

62**.** Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 5, 6 и 7.

Ответ: $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

63. В треугольник со сторонами 7, 10, 11 вписана окружность. Точки касания соединены между собой. Найдите наибольшую сторону полученного треугольника.

Ответ: стороны $a_1=\frac{14}{\sqrt{55}}\sqrt{6}$, $b_1=\frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{2}$, $c_1=\frac{8}{\sqrt{11}}\sqrt{3}$. Наибольшая $a_1=\frac{14}{\sqrt{55}}\sqrt{6}$.

64. В треугольник со сторонами 6, 10, 12 вписана окружность. Точки касания соединены между собой. Найдите наименьшую сторону полученного треугольника.

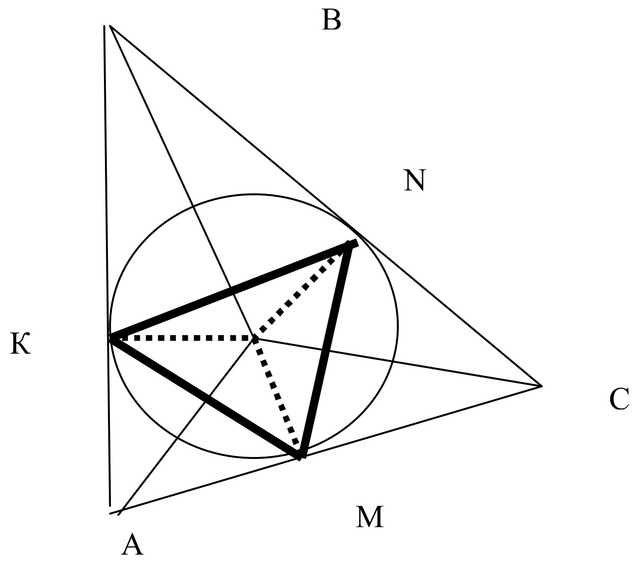
Решение. Центр окружности обозначим O. Пунктиром указаны ее радиусы r, они перпендикулярны сторонам. Так как центр окружности лежит на биссектрисах, то AK=AM=x, BK=BN=y, CN=CM=z. Составим систему $\begin{cases} x+z=6 \\ x+y=10 \\ y+z=12 \end{cases}$. Ее решение $\begin{cases} x=2 \\ y=8 \\ z=4 \end{cases}$.

Пусть a=6, b=10, c=12. Полупериметр $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=14$. По формуле Герона площадь треугольника равна $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=8\sqrt{14}$. Кроме того, площадь треугольника равна сумме трех треугольников с основаниями a=6, b=10, c=12 и высотой, равной r. Известна формула $S=rp$, которая позволит найти $r=\frac{S}{p}=\frac{8}{\sqrt{14}}$.

Искомый треугольник KMN. Надо найти все его стороны и выбрать наименьшую.

Кстати, каждая из его сторон перпендикулярна соответствующей биссектрисе и делится ею пополам. Обозначим половину угла A как α. Из треугольника AMO: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{r}{x}$. В этом треугольнике половина искомой стороны является перпендикуляром, ее можно найти: $\frac{a_1}{2}=x\cdot\sin\alpha$ или лучше $\frac{a_1}{2}=r\cdot\cos\alpha$. Используя связь косинуса и тангенса $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$, получим формулу $a_1=\frac{2rx}{\sqrt{x^2+r^2}}$. Аналогично получим формулы $b_1=\frac{2ry}{\sqrt{y^2+r^2}}$, $c_1=\frac{2rz}{\sqrt{z^2+r^2}}$.

Подставляя числовые данные, получим стороны $a_1 = \frac{8\sqrt{30}}{15}$, $b_1 = \frac{16\sqrt{15}}{15}$, $c_1 = \frac{40\sqrt{2}}{15}$. Выберем наименьшую: $a_1 = \frac{8\sqrt{30}}{15}$.



Ответ: $\frac{8}{15}\sqrt{30}$.

65. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 6, а угол при основании равен $\arcsin\frac{3}{5}$. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: $\frac{8}{5}$

66. В окружность радиуса R вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении 4:6:14. Найти площадь треугольника.

Ответ: использовать теорему синусов и формулу Герона, $S = R^2(1+\sqrt{3})$.

67. Из вершины A треугольника ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов, пересекающие прямую BC в точках D и E соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADE, если BC = a, AB:AC = 2:3.

Ответ: $\frac{6}{5}a$

68. Найти сторону правильного треугольника, вершины которого лежат на трех параллельных прямых, если эти прямые находятся в одной плоскости и средняя из них отстоит от двух других на расстояниях a и b.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2+ab}$, Указание: опишите окружность около треугольника.

69. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $a/3$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

Ответ: $\frac{a^2}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$

70. В равносторонний треугольник со стороной a вписан круг. Затем в этот треугольник вписаны еще три круга, касающиеся первого круга и сторон треугольника, и еще три круга, касающиеся только что вписанных и сторон треугольника, и т. д. Найдите сумму площадей всех вписанных кругов.

Ответ: $\frac{11}{96}\pi a^2$

71. В круг радиуса R вписан угол. Хорды, образующие угол, имеют длины 2a и 2b. Найти радиус круга, который касается извне первого круга и продолжений этих хорд, если хорды расположены по одну сторону от диаметра, имеющего с ними общую точку.

Ответ: $2R\left(\frac{2R+\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{R^2-b^2}}{R^2+ab+\sqrt{\left(R^2-a^2\right)\left(R^2-b^2\right)}}\cdot R-1\right)$

72. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AC = a, BC = b. Через точку C проведена прямая, лежащая вне треугольника и образующая с катетами углы, равные $\frac{\pi}{4}$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}(a+b)\left(a^2+b^2\right)\pm 2(a+b)\sqrt{ab\left(a^2+b^2\right)}}{2(a-b)^2}$

73. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равных отрезка. Найти отношение длин сторон треугольника ABC.
Ответ: BC:AC:AB = 5:10:13

74. В треугольнике ABC: угол A $= 120^0$, AC = 1, BC = $\sqrt{7}$. На продолжении стороны CA взята точка M так, что BM является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и M и касающейся в точке M окружности, проходящей через точки M, B и C.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$

75. Через одну и ту же точку окружности проведены две хорды, равные a и b. Если соединить их концы, то получится треугольник площади S. Определить радиус окружности.

Ответ: при $S>\frac{ab}{2}$ решений нет, при $S<\frac{ab}{2}$ два решения $R=\frac{ab}{4S}\sqrt{a^2+b^2\mp 2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}$ (верхний знак берется, когда угол между хордами острый, нижний знак, если угол тупой), при $S=\frac{ab}{2}$ одно решение $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ (хорды взаимно перпендикулярны)

76. В равнобедренном треугольнике с углом 120^0 радиус вписанной окружности равен R. Внутри треугольника расположены два равных, касающихся друг друга круга, каждый из которых касается одной боковой стороны треугольника и вписанной в треугольник окружности. Найти радиусы этих кругов.

Ответ: два случая $\frac{R}{3}$ или $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}R$

77. Найти стороны равнобедренного треугольника, сумма медиан которого равна 4R, где R – радиус описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: $\frac{8\sqrt{5}}{9}R,\ \frac{4}{3}R,\ \frac{4}{3}R$

78. Около треугольника ABC описана окружность и к ней в точке A проведена касательная, пересекающая луч BC в точке T. Найти длины отрезков CT и AT, если известны длины сторон треугольника ABC: a, b, и c.

Ответ: $\frac{a^2+c^2}{a},\ \frac{bc}{a}$

79. Продолжения высот треугольника ABC делят описанную около него окружность на дуги, длины которых относятся как $p : q : r$. Найти углы треугольника ABC.

Ответ: $\frac{p+q}{p+q+r}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \frac{q+r}{p+q+r}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \frac{p+r}{p+q+r}\cdot\frac{\pi}{2}$

80. Правильный треугольник ABC разбивается прямой на два треугольника ABD и ACD. В каком отношении прямая AD делит сторону BC, если радиус круга, вписанного в треугольник ABD, в два раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ACD?

Ответ: $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$

81. Из точки A, лежащей вне круга радиуса R, проведены касательная AB и секущая AC. Определить площадь треугольника ABC, если секущая наклонена под углом α к касательной AB и проходит на расстоянии, равном d от центра круга.

Ответ: $S_{ABC}=\frac{1}{2\sin\alpha}\left(R\cos\alpha-d\right)\left(R-d\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{R^2-d^2}\right)$

82. В треугольник ABC (AB=BC) вписана окружность. Через точку M, лежащую на стороне BC, проведена касательная, пересекающая прямую AC в точке K. Найдите AK, если AC= a, AB=6a/5, MC=a/10.

Ответ: 55a/103

83. В треугольник ABC (AB=BC) вписана окружность. Через точку M, лежащую на стороне AB, проведена касательная, пересекающая прямую BC в точке N. Найти AB, если AC=CN=a, MB=kAB.

Ответ: $\frac{ak}{1-k},\ \frac{1}{2}<k<1$

84. В треугольник ABC, площадь которого S, а углы α,β,γ, вписана окружность, центр которой точка O. Найти периметр треугольника, вершины которого – точки пересечения отрезков AO, BO и CO с окружностью.

Ответ: $\sqrt{8S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}+\cos\frac{\beta+\gamma}{4}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$

85. Вокруг треугольника ABC, площадь которого S, а углы α,β,γ, описана окружность. Найти периметр треугольника, вершины которого – середины дуг $\cup AB,\cup BC,\cup CA$.

Ответ: $\sqrt{\frac{8S}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}}\cdot\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$

86. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведен круг, касательный к гипотенузе. Найти отношение площадей круга и треугольника.

Ответ: $S_{кр} : S_{тр} = \pi \cos\alpha : 8\sin^3\alpha$

87. Через вершины A и C равнобедренного треугольника ABC с углом при вершине B, равным α, проведена окружность, касающаяся боковых сторон AB и BC треугольника. В эту окружность вписан равнобедренный треугольник AKC (AK=KC) так, что точка K расположена вне треугольника ABC. Найти отношение площадей треугольников AKC и ABC.

Ответ: $S_{AKC} : S_{ABC} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right) : \cos^2\frac{\alpha}{2}$

88. Найти углы прямоугольного треугольника, если что радиус вписанной окружности равен 2, а гипотенуза равна 13.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}, \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

89. Найти стороны прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 6, а радиус описанной окружности равен 17.
Ответ: 16, 30 и 34

3. Окружности

90. Через точку M, удаленную от центра окружности на расстояние b, проведена секущая MA так, что она делится окружностью пополам, MB = BA. Определить длину секущей MA, если радиус окружности равен r.

Ответ: $\sqrt{2\left(b^2 - r^2\right)}$

91. Из точки, лежащей на окружности, проведены две хорды, касательные к внутренней, концентрической с первой, окружности радиуса r. Найдите угол между хордами и радиус внешней окружности, если проекция каждой хорды на диаметр, перпендикулярный к другой хорде, равна p. Какие условия накладываются на параметры, чтобы задача решалась?

Ответ: $\arccos\left(\frac{p}{2r}-1\right), \frac{2r\sqrt{r}}{\sqrt{4r-p}}$ при $0 < p < 4r$.

92. Две окружности внутренне касаются в точке Q. Прямая, проходящая через центр P меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую – в точках B и C. Найти отношение радиусов окружностей, если части отрезка AD относятся как AB:BC:CD = 2:4:3.
Ответ: 3

93. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите длину отрезка BC, если длина хорды AB равна a.

Ответ: $a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$

94. Внутри четверги круга AOB радиуса R находится окружность радиуса $3R/8$, касающаяся дуги AB и отрезка OB. Найти радиус окружности, касающейся внешним образом данной окружности, дуги AB и отрезка AO.

Ответ: $\frac{22-2\sqrt{21}}{75}R$

95. В полукруг радиуса R вписаны два круга, касающиеся друг друга, полукруга и его диаметра. Радиус одного из кругов равен r. Найдите радиус другого круга.

Ответ: $\frac{Rr}{(R+2r)^2}\left(3R-2r \pm \sqrt{8\left(R^2-2Rr\right)}\right)$

96. Круга радиуса r касаются внешним образом три одинаковые окружности, касающиеся также попарно между собой. Найдите площади трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

Ответ: $r^2\left(12+7\sqrt{3}-\pi\left(\frac{23}{6}+2\sqrt{3}\right)\right)$

97. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом криволинейный треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

Ответ: $\frac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}$

98. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ имеют внутреннее касание. Найти радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и их общего диаметра.

Ответ: $\frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$

99. На отрезке длины $2a+2b$ и на его частях с длинами $2a$ и $2b$ как на диаметрах построены полуокружности, лежащие по одну сторону от отрезка. Найти радиус окружности, касающейся трех построенных полуокружностей.

Ответ: $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$

100. Два круга с одинаковыми радиусами r касаются друг друга внешним образом и касаются третьего круга с радиусом R внутренним образом. Найдите радиус круга, одновременно касающегося этих кругов (их три). Из двух возможных вариантов рассмотрите тот, в котором центр четвертого круга и центр круга с радиусом R лежат по разные стороны от точки касания кругов с радиусами r.

Ответ: $\frac{R\left(R-r-\sqrt{R(R-2r)}\right)}{R+r+\sqrt{R(R-2r)}}$

101. Через середину хорды длины a проведена другая хорда длины b. Определить длины отрезков, на которые хорда b делится хордой a.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right), b\geq a$

102. Расстояние до точки внутри круга радиуса R от его центра равно d. Определить длину хорды, проведенной через эту? точку, если хорда этой точкой делится в отношении 2:3.

Ответ: $\frac{5}{\sqrt{6}}\sqrt{R^2-d^2}, R>d$

103. На плоскости даны три крута радиуса 1 с центрами в точках $O_1(-1,1), O_2(0,1), O_3(1,1)$ соответственно. Найти площадь той части круга с центром в точке O_2, которая лежит вне двух других данных кругов.

Ответ: $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

104. На плоскости даны две окружности радиусов r_1 и r_2 $(r_1 > r_2)$. Найти расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно в k раз больше расстояния между точками касания общей внешней касательной.

Ответ: $k\frac{r_1-r_2}{\sqrt{k^2-1}}, k>1$

105. На плоскости даны две окружности радиусов r_1 и r_2, касающиеся некоторой прямой в точках А и В и лежащие по разные стороны от этой прямой. Найти расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно в κ раз больше длины отрезка АВ.

Ответ: $k\frac{r_1+r_2}{\sqrt{k^2-1}}, k>1$

4. Трапеции

106. Прямая, параллельная боковой стороне трапеции отсекает от нее ромб. Площади полученных фигур относятся как 4:5. Найти какую долю составляет сторона ромба от средней линии трапеции.
Ответ: 4/9 или 5/9
107. Прямая, параллельная основаниям трапеции, разделяет ее на две части. Длина отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, равна $\frac{1}{3}\sqrt{109}$. Основания трапеции равны 5 и 3. Найти отношение площадей полученных трапеций (нижней к верхней).
Ответ: $\frac{29}{7}$

108. Большее основание трапеции равно *a*, меньшее равно *b* . Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.
Ответ: $\frac{a-b}{2}$

109. Средняя линия трапеции разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся как *m: n* . Чему равно отношение основании трапеции?
Ответ: $\frac{3m-n}{3n-m}$

110. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее площадь на части, относящиеся как *m: n* , считая от верхнего основания *a* к нижнему большему основанию *b*.
Ответ: $\sqrt{\frac{na^2+mb^2}{m+n}}$

111. Известно, что в трапеции ABCB площади $S_{AOD}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, где O– точка пересечения диагоналей. Найти площадь этой трапеции.
Ответ: $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$

112. Основания трапеции равны *a* и *b* (*b*> *a*), высота равна *h*. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите площади треугольников AOB и COD.
Ответ: $\frac{abh}{2(a+b)}$

113. В трапеции отношение большего основания к меньшему равно *k*, а ее боковые стороны равны *a* и *b*. Найти основания трапеции, если известно, что ее диагонали перпендикулярны друг другу.
Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{k^2+1}}$, $k\sqrt{\frac{a^2+b^2}{k^2+1}}$

114. Дана прямоугольная трапеция с основаниями *a*, *b*. и меньшей боковой стороной *c*. Определить расстояния точки пересечения диагоналей от основания *a* и от меньшей боковой стороны.
Ответ: $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$
115. Основания равнобедренной трапеции равны a и *b* (*a* >*b*), Прямые, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.
Ответ: $\frac{ab}{a+2b}$

116. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны a и c, а прилежащие к основанию a углы равны α и β.

Ответ: $\dfrac{\left(a^2-c^2\right)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

117. Сумма длин оснований трапеции равна 9, а длины диагоналей равны 5 и 34. Углы при большем основании – острые. Найдите площадь трапеции.
Ответ: 27/2.

118. В равнобочной трапеции биссектриса тупого угла делит основание пополам. Высота трапеции равна h, а средняя линия m $(m \ge 2h)$. Найти периметр трапеции.

Ответ: $\frac{1}{3}\left(10m-2\sqrt{m^2-3h^2}\right)$

119. В равнобочной трапеции биссектриса тупого утла делит основание пополам. Высота трапеции h, а большее основание b $(b \ge 2h)$. Найти периметр трапеции.

Ответ: $3b-\sqrt{b^2-4h^2}$

120. В равнобедренной трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна к боковой сторож CD. Найти BC, если известно, что AD=a, AB+BC=10a/9.
Ответ: BC=7a/9 или 17a/18

121. В равнобедренной трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD. Найти BC, если известно, что AD=a, $AB^2+BC^2=\dfrac{11a^2}{16}$

Ответ: BC = 3a/4

122. Определить площадь трапеции, если ее основания равны 6 и 11. одна из боковых сторон равна 4, а сумма углов при нижнем основании равна 90°.
Ответ: 102/5

5. Четырехугольники

123. Площадь одного квадрата в 16 раз больше площади другого. Во сколько раз диагональ первого квадрата больше диагонали второго квадрата?
Ответ: в 4 раза
124. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки a=9 и b=10. Найдите периметр параллелограмма.
Ответ: P=4a+2b=56

125. Определить углы параллелограмма, если даны две его высоты h_1, h_2 и периметр 2 p.

Ответ: $\arcsin\dfrac{h_1+h_2}{p}$ и $\pi-\arcsin\dfrac{h_1+h_2}{p}$

126. Найти величину угла между диагоналями прямоугольника с периметром 2p и площадью $\dfrac{3p^2}{16}$

Ответ: $2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3}$

127. Дан квадрат ABCD и точка O вне квадрата. Известно, что OA = OB = 5, OD = $\sqrt{13}$. Найдите площадь квадрата.
Ответ: 2

128. В параллелограмме с длинами сторон a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения биссектрис.

Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$

129. Через середину М стороны ВС параллелограмма ABCD, площадь которого равна 1, и вершину А проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке О. Найдите площадь четырехугольника OMCD.
Ответ: 5/12

130. Дан параллелограмм, в котором острый угол равен 60 градусов. Определите отношение длин сторон, если отношение квадратов длин диагоналей параллелограмма равно 19/7.
Ответ: 3:2

131. В параллелограмме ABCD угол BAD равен α. Пусть О – произвольная точка внутри параллелограмма O_1, O_2, O_3, O_4 – точки, симметричные точке О относительно прямых АВ, ВС, CD, AD соответственно. Определить отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма.
Ответ: $2\sin^2\alpha$

132. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого квадрата. Определить отрезки, на которые стороны первого квадрата рассекаются вершинами второго квадрата, если площадь второго квадрата равна 25/49 площади первого.
Ответ: 3a/7 и 4a/7

133. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан ромб так, что один острый угол у них общий и все четыре вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны ромба, если длина катета равна $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$
Ответ: 2/5

134. В прямоугольник со сторонами a и b вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся как 1:3. Найти меньшую сторону этого прямоугольника.
Ответ: $\frac{1}{8}\sqrt{10a^2-12ab+10b^2}$

135. В прямоугольнике ABCD даны AB= a, AD=b . Точка Е лежит на стороне АВ и угол СЕВ равен углу АЕВ. Найти АЕ.
Ответ: $AE = a-\sqrt{a^2-b^2}$

6. Четырехугольники и окружность

136. Найти площадь фигуры, получающейся после вырезания из трапеции вписанного в нее круга?
Ответ

137. Стороны АВ и CD четырехугольника ABCD перпендикулярны (при продолжении) и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса $\sqrt{50}$. Найдите площадь четырехугольника ABCD, если ВС: AD=1:7.
Ответ: 144

138. На диагонали BD прямоугольной трапеции ABCD (угол D=90°, BC| | AD) взята точка Q такая, что BQ:QD = 1:3. Окружность с центром в Q касается прямой AD и пересекает прямую ВС в точках Р и М. Найдите АВ, если ВС = 9, AD==8, PM=4.
Ответ: 3

139. На диагонали AC параллелограмма ABCD взята точка P такая, что AP:PC = 3:5. Окружность с центром в P касается прямой BC и пересекает отрезок AD в точках K и L. Точка K лежит между точками A и L, AK = 9, KL = 3, LD = 12. Найдите периметр параллелограмма.
Ответ: 58

140. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большим основанием острые углы α и β. Определить радиус круга, если площадь трапеции равна Q.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$

141. Трапеция ABCD вписана в круг, BC| | AD. На дуге CD взята точка E , которая соединена со всеми вершинами трапеции, угол CED =120 градусов, разность угла ABE и угла BAE равна α. Найти для треугольника ABE отношение периметра к радиусу вписанной в него окружности.

Ответ: $2\left(\operatorname{ctg}\left(30^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(30^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)+\sqrt{3}\right)$

142. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания составляет 3/8 площади трапеции. Найдите отношение оснований трапеции.
Ответ: 3

143. В сектор с углом α вписан квадрат с площадью S так, что две его стороны параллельны хорде, соединяющей концы дуги сектора. Определить радиус сектора.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{S\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+4\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+5\right)}$

144. В ромб ABCD вписана окружность. Прямая, касающаяся этой окружности в точке P, пересекает стороны AB, BC и продолжения стороны AD соответственно в точках N, Q и M так, что MN:NP:PQ = 7: 1 :2. Определить углы ромба.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$ и $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$

145. Окружность, вписанная в трапецию ABCD, касается боковой стороны AB в точке F. Основания трапеции a и b . Найдите площадь трапеции, если AF = m , FB = n .

Ответ: $\frac{b(b+m-n)}{b-n}\sqrt{mn}$

146. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой – стороной правильного вписанного шестиугольника. Найти расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r.

Ответ: два случая $\frac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$ или $\frac{r(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$

147. Окружность, построенная на основании AD трапеции ABCD как на диаметре проходит через середины боковых сторон AB и CD и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

Ответ: $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$

148. Стороны AB и CD четырехугольника ABCD перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r. Найдите площадь четырехугольника ABCD, если BC: AB = k.

Ответ: $3r^2\frac{1-k^2}{1+k^2}$ при $0<k<\frac{1}{\sqrt{5}}$

149. Круг и квадрат имеют общий центр и их площади равны. Сторона квадрата равна 1. Вычислите сумму длин частей окружности, расположенных внутри квадрата.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2\pi-8\arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

150. Окружность касается сторон AB и AD квадрата ABCD и проходит через вершину C. В каком отношении эта окружность делит сторону BC?

Ответ: $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

151. Основания равнобедренной трапеции равны *a* и *b (a>b),* острый угол при вершине равен α. Найти радиус окружности, проходящей через две вершины трапеции и касающейся ее оси симметрии.

Ответ: $\frac{a+b\pm 2\sqrt{ab}\sin\alpha}{4\cos^2\alpha}$

152. В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг радиуса r=1. Найти сторону ромба.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$

153. Длины сторон параллелограмма равны *a* и *b (a>b)* острый угол равен α. Найти радиус окружности, проходящей через вершину одного из острых углов и касающейся двух несмежных с ней сторон параллелограмма или их продолжений.

Ответ: $\left(a+b\pm\sqrt{2ab(1-\cos\alpha)}\right)\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

7. Различные задачи планиметрии

154. В окружность радиуса R вписан выпуклый многоугольник, площадь которого больше $2R^2$, а длина каждой стороны больше R. Найти число сторон многоугольника.
Ответ: n=5

155. Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию $\alpha,\frac{4}{3}\alpha,\frac{5}{3}\alpha,\ldots$ Найти наибольшее возможное число сторон такого многоугольника.

Ответ: n=6

156. Из прямоугольного сектора OAB круга радиуса R с центром в точке O вырезан полукруг, диаметр которого совпадает с прямолинейной частью OA границы сектора. В оставшуюся часть вписана окружность, в образовавшийся при этом криволинейный треугольник (ограниченный дугами трех окружностей) вписана окружность. Найти ее радиус.

Ответ: $\frac{R}{17}(5-2\sqrt{2})$

157. Прямоугольный сектор OAB круга радиуса R с центром в O разделен на две части дугой окружности того же радиуса с центром в точке A – конце дуги сектора. В меньшую часть вписана полуокружность с центром на OB, проходящая через точку B и касающаяся дуги окружности, разделяющей сектор. В криволинейный треугольник, образованный дугами трех окружностей, вписана окружность. Найти ее радиус.

Ответ: $\frac{R}{52}(15-6\sqrt{3})$

158. Найти площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами *a* и *b* так, что сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины – на катетах треугольника.

Ответ: $\frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+b^2+ab\right)^2}$

159. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, сторона которого лежит на гипотенузе, а две вершины – на катетах треугольника. В каком отношении вершина квадрата делит катет треугольника, если известно, что угол, противолежащий этому катету, равен α.

Ответ: $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

160. Через некоторую точку внутри треугольника площади S проведены прямые, параллельные двум его сторонам. Площади треугольников, отсекаемых этими прямыми равны S_1, S_2. Найти площадь треугольника, ограниченного этими прямыми и третьей стороной.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}-\sqrt{S}\right)^2$

161. К окружности радиуса r из точки А, лежащей вне окружности, проведены две секущие ABC и ADE, причем ABC проходит через центр окружности. Найти длину AB, если известно, что дуги CE и BD равны α и β соответственно.

Ответ: $AB = 2r\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

162. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c и в три раза больше высоты, опущенной из вершины прямого угла. Найти катеты.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2\sqrt{3}}c$

163. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c и больше одного из катетов на третью часть другого. Найти площадь треугольника.

Ответ: $\frac{6c^2}{25}$

164. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c и вместе с катетами образует геометрическую прогрессию. Найти катеты.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}c$, $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}c$

165. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены круги. Найти площадь общей части этих кругов, если известно, что длины катетов a и b.

Ответ: $\frac{a^2}{4}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\frac{ab}{4}$

166. На высоте прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, как на диаметре построена окружность. Найти площадь части треугольника, оказавшейся вне окружности, если известно, что длины катетов a и b.

Ответ: $\frac{ab}{2}-\frac{a^2b^2}{8\left(a^2+b^2\right)}\left(\pi+\frac{4ab}{a^2+b^2}\right)$

167. В прямоугольном треугольнике расстояние между точками пересечения гипотенузы длиной h с медианой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равно d. Найти длины катетов.

Ответ: $\frac{h(h\pm 2d)}{\sqrt{2h^2+8d^2}}$

168. В прямоугольном треугольнике расстояние между точками пересечения гипотенузы длиной h с высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равно d. Найти длины катетов.

Ответ: $\sqrt{\frac{h^2}{2} \pm hd}$

169. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна h, а радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}, h > 2r$

170. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника с углом α при основании.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha$

171. В прямоугольном треугольнике ABC угол A – прямой, угол B равен 30° , а радиус вписанной окружности 3. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

Ответ: $\sqrt{45+18\sqrt{3}}$

172. Точка P лежит на стороне BC квадрата ABCD, длина BC=a и PC:BP=7. Найти радиус окружности, касающейся сторон AB и AD и проходящей через точку P.

Ответ: $\frac{5a}{8}$

173. В прямоугольный треугольник с площадью 24 *см2* вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.
Ответ: 10, 8 и 6 см

174. В окружность радиуса r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h. Найти площадь трапеции.
Ответ: $h\sqrt{4r^2\sin^2\alpha - h^2}$

175. В квадрат вписан другой квадрат. Один из острых углов между сторонами квадратов равен α. При каком значении α площадь вписанного квадрата составит 2/3 площади описанного?
Ответ: $\alpha_1 = \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$ или $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 75^\circ$

176. Внутри угла в 60 градусов взята точка, расстояния которой до сторон угла равны 2 и 11. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.
Ответ: 14

177. На отрезке и двух его половинках построены три полукруга по одну сторону от отрезка. По радиусу R круга, касательного ко всем трем полукругам, определить длину отрезка.
Ответ: $6R$

178. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в одном конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в большую из этих частей.
Ответ: $3R/8$

179. На катете AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что полуокружность, построенная на отрезке PC как на диаметре, касается гипотенузы AB. В каком отношении полуокружность делит отрезок PB?

Ответ: $\frac{PM}{BM} = 4(3 - 2\sqrt{2})$, M – точка пересечения полуокружности с PB.

180. На основаниях AB и CD трапеции ABCD построены квадраты вне ее. Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходят через точку пересечения диагоналей трапеции.

8. Литература

1. Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М., 1957

2. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. 2-е изд. Минск, 1965

3. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. М., 1984