Исследовать функцию и построить график $f(x)=-x^3+3x-2$.

1) <u>Область определения</u>: $D(f)=(-\infty;+\infty)$;

2) <u>Чётность</u>: Если $f(x)$ – четная, то $\forall x\in D(f): f(x)=f(-x)$.

В нашем случае $f(-x)=x^3-3x-2$ и должно выполняться $x^3-3x-2=-x^3+3x-2\Rightarrow 2x^3-6x=0\Rightarrow x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$, т.е. на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$ $(\sqrt{3};+\infty)$ и условие $f(x)=f(-x)$ не выполняется, и $f(x)$ не является чётной.

Если $f(x)$ – нечетная, то $\forall x\in D(f): f(-x)=-f(x)$.

$-f(x)=x^3-3x+2$, $f(-x)=x^3-3x-2$ $x^3-3x+2=x^3-3x-2\Rightarrow 2=-2$, чего не может быть. Поэтому $f(x)$ не является нечётной.

Функция общего вида.

3) <u>Точки пересечения с осями координат</u>: $y(0)=-2$.

$$y=0\Leftrightarrow -x^3+3x-2=0\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow x^3-x-2x+2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x-1)=0\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)-2(x-1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=x_3=1.$$

4) <u>Интервалы непрерывности и точки разрыва</u>: функция непрерывна на $(-\infty;+\infty)$, точек разрыва нет.

5) <u>Асимптоты</u>:

А) Т.к. функция непрерывна всюду, то вертикальных асимптот нет.

В) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+3x-2}{x}=-\infty$ – наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6) <u>Экстремумы и интервалы возрастания и убывания</u>: $y'=-3x^2+3$.

$-3x^2+3=0\Leftrightarrow x^2=1$; $x_1=-1$, $x_2=1$. x_1 и x_2 – критические точки. Раньше мы нашли, что $y(1)=0$. $y(-1)=4$

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;+\infty)$
y'	– отрицательная (<0)	+ положительная (>0)	– отрицательная (<0)
y	↓ убывает	↑ возрастает	↓ убывает

Из таблицы видно, что точка $\left(-1;0\right)$ – точка локального минимума, а точка $\left(1;0\right)$ – точка локального максимума.

8) <u>Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба</u>: $y''=(-3x^2+3)'=-6x$.

$-6x=0\Leftrightarrow x=0$, т.е. единственной точкой перегиба может быть точка $x=0$. Раньше мы нашли, что $y(0)=-2$.

Составим ещё одну таблицу:

x	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$
y''	+ положительная (>0)	– отрицательная (<0))
y	$\cup$ вогнута	$\cap$ выпукла

Из этой таблицы видно, что при переходе через точку $x = 0$ функция меняет вогнутость на выпуклость, т.е. в этой точке у функции действительно перегиб (кривая переходит с одной стороны касательной на другую).

<u>График</u>: