

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

E – середина BC , т.е. ME – медиана, а значит, и высота треугольника CMB (иначе – апофема боковой грани CMB). $CE = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3}$. По теореме Пифагора

$$ME = \sqrt{MC^2 - CE^2} = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}.$$

Площадь боковой грани CMB : $S_{\triangle CMB} = \frac{BC \cdot ME}{2}$; $S_{\triangle CMB} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2} = 2\sqrt{39}$. Площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = 3S_{\triangle CMB} = 6\sqrt{39}.$$

2) объём пирамиды;

MP – высота правильной пирамиды $MABC$, поэтому P – точка пересечения высот (медиан) треугольника ABC . AE – высота и медиана треугольника ABC .

$AE = \frac{BC \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$; $PE = \frac{1}{3}AE = 2$. По теореме Пифагора

$$MP = \sqrt{ME^2 - PE^2} = \sqrt{13 - 4} = 3.$$

Объём пирамиды $V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot MP$; $S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$.

$$V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot MP = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 3 = 12\sqrt{3}.$$

3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

PB – проекция бокового ребра MB на плоскость основания, поэтому угол между боковым ребром и плоскостью основания – это $\angle MBP$. $\sin(\angle MBP) = \frac{MP}{MB} = \frac{3}{5}$ и

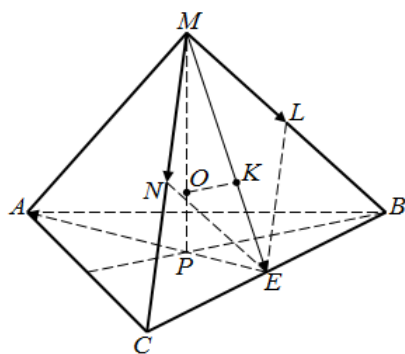
$$\angle MBP = \arcsin(0,6).$$

4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{EA}$, где E – середина BC ;

L и N – середины рёбер MB и MC . Поэтому $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MN}$. Чтобы найти

вектор $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MN}$, нужно через точку L провести прямую, параллельную MC , а через точку N – прямую, параллельную MB . Точка пересечения этих прямых – конец век-

тора $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MN}$, а его началом является точка M . Но прямая, проходящая через точку L параллельно MC , пересекает ребро BC в точке E , как средняя линия треугольника CMB . Аналогично, прямая, проходящая через точку N параллельно MB , пересекает ребро BC в точке E . Таким образом, $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME}$. Длину вектора $\overrightarrow{ME}$ $ME = \sqrt{13}$ мы нашли ещё в пункте 1), а длину вектора $\overrightarrow{EA}$ $AE = 6$ в пункте 2). Чтобы найти скалярное произведение этих



векторов, осталось определить косинус угла между ними. Если привести векторы $\overrightarrow{ME}$ и $\overrightarrow{EA}$ к общему началу E , то между ними получится тупой угол, смежный с углом AEM . Поэтому $\cos(\angle(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{EA})) = -\frac{PE}{ME} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ и

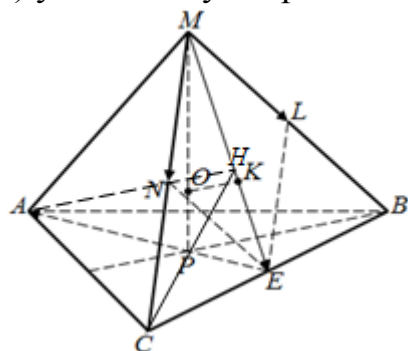
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{EA} = -\sqrt{13} \cdot 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = -12.$$

5) объём вписанного в пирамиду шара;

Шар, вписанный в пирамиду, касается основания в точке P , а боковой грани CMB – в точке K , лежащей на апофеме ME . Т.к. радиус шара OP перпендикулярен плоскости основания, то центр O шара лежит на высоте MP , а т.к. радиус OK перпендикулярен грани CMB , то $OK \perp ME$. $EK = EP = 2$, как касательные из одной точки. $MK = ME - EK = \sqrt{13} - 2$. У прямоугольных треугольников OKM и EPM общий острый угол PME , поэтому они подобны, и $\frac{OK}{MK} = \frac{EP}{MP} \Rightarrow OK = \frac{MK \cdot EP}{MP}$;

$$OK = \frac{(\sqrt{13} - 2) \cdot 2}{3}. \text{ Объём шара: } V = \frac{4}{3}\pi \cdot OK^3 = \frac{4 \cdot (\sqrt{13} - 2)^3 \cdot 8}{3 \cdot 27}\pi = \frac{32(\sqrt{13} - 2)^3}{81}\pi.$$

6) угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.



Из точки A сторон основания AC и AB проведём высоту AH к грани CMB . Отметим, хоть это и не обязательно, что плоскость AME содержит перпендикуляр OK к плоскости CMB (радиус вписанного шара перпендикулярен к касательной плоскости), и поэтому $(AME) \perp (CMB)$, отсюда следует, что $AH \in (AME)$ и $H \in ME$.

CH – проекция AC на плоскость CMB , т.е. угол между стороной основания и плоскостью боковой грани – это $\angle ACH$.

$\sin(\angle ACH) = \frac{AH}{AC}$. По условию $AC = 4\sqrt{3}$. Найдём AH . В пункте 1) мы на-

шли, что $S_{\Delta CMB} = 2\sqrt{39}$, а в пункте 2): $V_{MABC} = 12\sqrt{3}$. Т.к. $V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta CMB} \cdot AH$, то

$$\frac{1}{3}S_{\Delta CMB} \cdot AH = 12\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{36\sqrt{3}}{2\sqrt{39}} = \frac{18}{\sqrt{13}};$$

$$\sin(\angle ACH) = \frac{18}{\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{39}} = \frac{9\sqrt{39}}{2 \cdot 39} = \frac{3\sqrt{39}}{26}; \angle ACH = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{39}}{26}\right).$$