

$\frac{\log_{x+3}(x^2 - x + 30)}{\log_{x+3}(x^2 - x - 1)} \geq \frac{\lg(x^4 - 2x^3 + x^2)}{\lg(x^2 - x - 1)}$. Отметим, что из решения этого неравенства надо будет исключить значения, удовлетворяющие условиям $x + 3 \leq 0$ или $x \leq -3$ и $x + 3 = 1$ или $x = -2$, если эти значения попадут в решение. Придадим

неравенству вид $\frac{\log_{x+3}(x^2 - x + 30)}{\log_{x+3}(x^2 - x - 1)} \geq \frac{\lg(x^2 - x)^2}{\lg(x^2 - x - 1)}$. Легко доказать, что

$$\frac{\log_{x+3}(x^2 - x + 30)}{\log_{x+3}(x^2 - x - 1)} = \frac{\lg(x^2 - x + 30)}{\lg(x^2 - x - 1)} : \frac{\left(\frac{\lg(x^2 - x + 30)}{\lg(x + 3)} \right)}{\left(\frac{\log_{x+3}(x^2 - x - 1)}{\lg(x + 3)} \right)} = \frac{\lg(x^2 - x + 30)}{\lg(x^2 - x - 1)}, \quad \text{и}$$

неравенство можно переписать в виде $\frac{\lg(x^2 - x + 30)}{\lg(x^2 - x - 1)} \geq \frac{\lg(x^2 - x)^2}{\lg(x^2 - x - 1)}$. Сделаем

замену $y = x^2 - x$: $\frac{\lg(y + 30)}{\lg(y - 1)} \geq \frac{\lg y^2}{\lg(y - 1)} \quad (2).$

1. $0 < y - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 2$. В этом случае $\lg(y - 1) < 0$ и из неравенства (2) следует $\lg(y + 30) \leq \lg y^2$, и т.к. $10 > 1$, то $y + 30 \leq y^2$; $y^2 - y - 30 \geq 0$. $D = 1 + 4 \cdot 30 = 121$;

$\sqrt{D} = 11$; $y_1 = \frac{1 - 11}{2} = -5$, $y_2 = \frac{1 + 11}{2} = 6$. Решением неравенства (2) является множество $(-\infty; -5] \cup [6; +\infty)$, но это невозможно, т.к. $1 < y < 2$.

2. $y - 1 > 1 \Leftrightarrow y > 2$. В этом случае $\lg(y - 1) > 0$ и $\lg(y + 30) \geq \lg y^2$; $y + 30 \geq y^2$ $y^2 - y - 30 \leq 0$; $-5 \leq y \leq 6$. И т.к. $y > 2$, то $2 < y \leq 6 \Leftrightarrow 2 < x^2 - x \leq 6$.

2.1.

$x^2 - x > 2$; $x^2 - x - 2 > 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$, $\sqrt{D} = 3$; $x_1 = \frac{1 - 3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1 + 3}{2} = 2$, т.е.

$x < -1 \cup x > 2$. Как отмечено в самом начале, значения $x \leq -3$ и $x = -2$ из интервала $(-\infty; -1)$ следует исключить, т.е. $-3 < x < -2 \cup -2 < x < -1 \cup x > 2$.

2.2.

$x^2 - x \leq 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$. $D = 1 + 4 \cdot 6 = 25$, $\sqrt{D} = 5$; $x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3$, т.е.

$-2 \leq x \leq 3$.

Осталось из интервала $(2; +\infty)$ исключить значения, не удовлетворяющие условиям из 2.2. и из интервала $(-2; 3]$ – значения, не удовлетворяющие 2.1. Получаем решение: $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; 3]$.