

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим минимальное значение целевой функции $F(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4$ при следующих условиях-ограничений.

$$5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6$$

$$3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2$$

Расширенная матрица системы ограничений-равенств данной задачи:

5	-1	-7	2	6
3	-1	-4	1	2

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базовой переменной можно выбрать x_3 .

Разрешающий элемент $PЭ = -7$. Строка, соответствующая переменной x_1 , получена в результате деления всех элементов строки x_3 на разрешающий элемент $PЭ = -7$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 записываем нули.

Все остальные элементы определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент $PЭ$.

$$НЭ = СЭ - (A * B) / PЭ$$

СТЭ - элемент старого плана, $PЭ$ - разрешающий элемент (-7), A и B - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и $PЭ$.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

$5 : -7$	$-1 : -7$	$-7 : -7$	$2 : -7$	$6 : -7$
$3 - (5 \cdot -4) : -7$	$-1 - (-1 \cdot -4) : -7$	$-4 - (-7 \cdot -4) : -7$	$1 - (2 \cdot -4) : -7$	$2 - (6 \cdot -4) : -7$

Получаем новую матрицу:

$-5/7$	$1/7$	1	$-2/7$	$-6/7$
$1/7$	$-3/7$	0	$-1/7$	$-10/7$

2. В качестве базовой переменной можно выбрать x_4 .

Разрешающий элемент $PЭ = -1/7$. Строка, соответствующая переменной x_2 , получена в результате деления всех элементов строки x_4 на разрешающий элемент $PЭ = -1/7$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 записываем нули.

Все остальные элементы определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

$^{-5/7-(1/7 \cdot ^{-2/7}):^{-1/7}}$	$^{1/7-(-3/7 \cdot ^{-2/7}):^{-1/7}}$	$^{1-(0 \cdot ^{-2/7}):^{-1/7}}$	$^{-2/7-(-1/7 \cdot ^{-2/7}):^{-1/7}}$	$^{-6/7-(-1^{3/7} \cdot ^{-2/7}):^{-1/7}}$
$^{1/7 : ^{-1/7}}$	$^{-3/7 : ^{-1/7}}$	$^{0 : ^{-1/7}}$	$^{-1/7 : ^{-1/7}}$	$^{-1^{3/7} : ^{-1/7}}$

Получаем новую матрицу:

-1	1	1	0	2
-1	3	0	1	10

Поскольку в системе имеется единичная матрица, то в качестве базисных переменных принимаем $X = (3,4)$.

Выразим базисные переменные через остальные:

$$x_3 = x_1 - x_2 + 2$$

$$x_4 = x_1 - 3x_2 + 10$$

Подставим их в целевую функцию:

$$F(X) = -2x_1 + x_2 + 8(x_1 - x_2 + 2) - 2(x_1 - 3x_2 + 10)$$

или

$$F(X) = 4x_1 - x_2 - 4$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 10$$

При вычислениях значение $F_c = -4$ временно не учитываем.

Матрица коэффициентов $A = a(ij)$ этой системы уравнений имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Базисные переменные это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

$$X_0 = (0,0,2,10)$$

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	2	-1	1	1	0
x_4	10	-1	3	0	1

F(X0)	0	-4	1	0	0
-------	---	----	---	---	---

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2 , так как это наибольший коэффициент.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}

и из них выберем наименьшее:

$$\min(2 : 1, 10 : 3) = 2$$

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	min
x_3	2	-1	1	1	0	2
x_4	10	-1	3	0	1	$10/3$
F(X1)	0	-4	1	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_3 в план 1 войдет переменная x_2 .

Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_3 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=1. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_2 и столбец x_2 . Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

$$НЭ = СЭ - (A*B)/РЭ$$

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (1), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

В	x_1	x_2	x_3	x_4
2 : 1	-1 : 1	1 : 1	1 : 1	0 : 1
$10 - (2 \cdot 3) : 1$	$-1 - (-1 \cdot 3) : 1$	$3 - (1 \cdot 3) : 1$	$0 - (1 \cdot 3) : 1$	$1 - (0 \cdot 3) : 1$
$0 - (2 \cdot 1) : 1$	$-4 - (-1 \cdot 1) : 1$	$1 - (1 \cdot 1) : 1$	$0 - (1 \cdot 1) : 1$	$-0 - (0 \cdot 1) : 1$

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	2	-1	1	1	0
x_4	4	2	0	-3	1
F(x_1)	-2	-3	0	-1	0

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	2	-1	1	1	0
x_4	4	2	0	-3	1
F(x_2)	-2	-3	0	-1	0

Оптимальный план можно записать так:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 4$$

$$F(X) = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -6$$