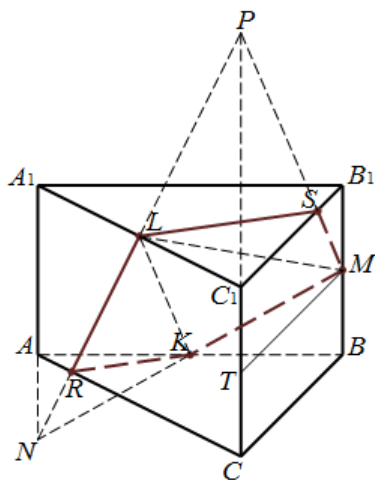


Построить сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , A_1C_1 , BB_1 . Найти площадь сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\sqrt{7}/7$.



$$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = AB = BC = AC = a = 2;$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{\sqrt{7}}{7}; K, L, M - \text{середины рёбер } AB, A_1C_1, BB_1 \text{ соответственно.}$$

Точки M и K сечения лежат в плоскости грани AA_1B_1B , поэтому сечение пересекает боковую грань AA_1B_1B по прямой MK , продолжение которой за точку K пересекает продолжение ребра AA_1 за точку A в точке N . Очевидно, что

$$MN = AB_1 = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{29}{7}} \quad (\text{по теореме Пифагора}).$$

$\triangle AKN = \triangle BKM$ по катету и острому углу: $AK = BK$ по условию, $\angle AKN = \angle BKM$ как вертикальные, значит,

$$NK = KM; AN = BM = \frac{h}{2}; A_1N = AA_1 + AN = \frac{3h}{2}.$$

Точки N и L сечения лежат в плоскости грани AA_1C_1C , поэтому сечение пересекает боковую грань AA_1C_1C по прямой NL , пересекающей ребро AC основания в точке R , а продолжение бокового ребра CC_1 за точку C_1 – в точке P .

$\triangle C_1PL = \triangle A_1NL$ по катету и острому углу: $A_1L = C_1L$ по условию, $\angle PLC_1 = \angle NLA_1$

как вертикальные, значит, $PC_1 = A_1N = \frac{3h}{2}$ и $NL = PL = \sqrt{NA_1^2 + LA_1^2} = \sqrt{\frac{9h^2}{4} + \frac{a^2}{4}};$

$$NP = 2NL = \sqrt{a^2 + 9h^2} + \sqrt{4 + \frac{9}{7}} = \sqrt{\frac{37}{7}}.$$

Точки P и M сечения лежат в плоскости грани BB_1C_1C , поэтому сечение пересекает боковую грань BB_1C_1C по прямой PM , пересекающей ребро B_1C_1 основания в точке S . Сечением призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , A_1C_1 , BB_1 , является пятиугольник $MKRLS$. Чтобы найти площадь этого сечения, нужно из площади треугольника NPM вычесть площади треугольников NRK и PSL . Найдём сторону PM треугольника NPM . Для этого проведём $MT \parallel BC$. $TM = BC = a$.

$$C_1T = B_1M = \frac{h}{2}; PT = PC_1 + C_1T = \frac{3h}{2} + \frac{h}{2} = 2h. PM = \sqrt{TM^2 + PT^2} = \sqrt{a^2 + 4h^2};$$

$$PM = \sqrt{4 + \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{32}{7}}.$$

Зная все стороны треугольника NPM , найдём его площадь по формуле Герона.

$$p = \frac{NP + PM + MN}{2} = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{32} + \sqrt{29}}{2\sqrt{7}}; p - NP = \frac{\sqrt{32} + \sqrt{29} - \sqrt{37}}{2\sqrt{7}};$$

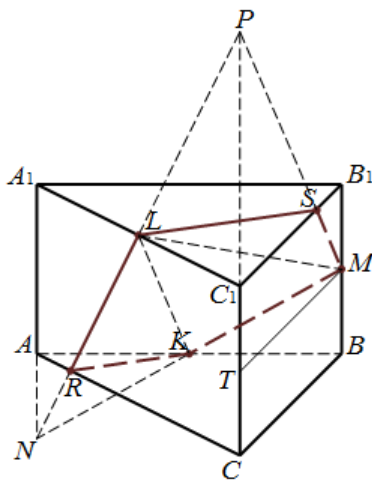
$$p - PM = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{29} - \sqrt{32}}{2\sqrt{7}}; \quad p - MN = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{32} - \sqrt{29}}{2\sqrt{7}}.$$

$$p(p - NP) = \frac{(\sqrt{32} + \sqrt{29})^2 - 37}{28} = \frac{32 + 29 - 37 + 2\sqrt{32 \cdot 29}}{28} = \frac{8\sqrt{58} + 24}{28};$$

$$(p - PM)(p - MN) = \frac{37 - (\sqrt{32} - \sqrt{29})^2}{28} = \frac{37 - 32 - 29 + 8\sqrt{58}}{28} = \frac{8\sqrt{58} - 24}{28};$$

$$S^2 = p(p - NP)(p - PM)(p - MN) = \frac{64 \cdot 58 - 24^2}{28^2} = 4, \quad S = 2,$$

где S – площадь треугольника NPM .



Т.к. $NL = \frac{1}{2}NP$ и $NK = \frac{1}{2}NM$, то $S_{\triangle NLK} = \frac{1}{4}S$.

Далее, из подобных треугольников NAR и NA_1L

$$\frac{NR}{NL} = \frac{NA}{NA_1} = \frac{h}{2} : \frac{3h}{2} = \frac{1}{3}; \quad NR = \frac{1}{3}NL \quad \text{и} \quad S_{\triangle NRK} = \frac{1}{3}S_{\triangle NLK} = \frac{1}{12}S.$$

ML – медиана треугольника NPM , поэтому $S_{\triangle PML} = \frac{1}{2}S$. Из

подобных треугольников C_1PS и TPM

$$\frac{PS}{PM} = \frac{PC_1}{PT} = \frac{3h}{2} : 2h = \frac{3}{4}; \quad PS = \frac{3}{4}PM; \quad S_{\triangle LPS} = \frac{3}{4}S_{\triangle PML} = \frac{3}{8}S.$$

Площадь сечения $MKRLS$:

$$S_{MKRLS} = S - \frac{1}{12}S - \frac{3}{8}S = \frac{13}{24}S = \frac{13}{12}.$$