Лекция №2

Решение систем линейных уравнений.

1. **Решение систем 3-х линейных уравнений методом Крамера**.

Определение. Системой 3-х линейных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В этой системе x_1, x_2, x_3 искомые величины, коэффициенты $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$-коэффициенты при неизвестных, b_1, b_2, b_3-свободные члены.

Определение. Решением системы линейных уравнений называется такие значения тройки x_1, x_2, x_3, которые после подстановки в уравнения превратят их в тождества.

Замечание. Решение системы линейных уравнений не изменится при следующих операциях

- Перестановки уравнений.
- Умножении всех коэффициентов уравнения и свободного члена на одно и тоже число.
- Почленное сложение (вычитание) уравнений.

Теорема. Если определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \quad \text{система имеет единственное решение}$$

Замечание. Если определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен нулю, то возможны две ситуации: или система не имеет решений или система имеет бесчисленное количество решений.

Замечание. Если система имеет единственное решение, то она называется совместной.

Теорема. Правило Крамера.

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы, составленные из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Определители матриц полученных из матрицы коэффициентов, заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Если, определитель матрицы коэффициентов Δ отличен от нуля, т.е. $\Delta \neq 0$, то решение системы линейных уравнений может быть вычислено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Решение. Сначала посчитаем определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 45 + 12 - 20 + 3 = -44$$

Так как определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 6 - 36 - 0 + 1 = -44$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 27 + 3 + 12 - 0 = 44$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 0 - 1 - 0 - 9 - 10 = -44$$

Найдем решения системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-44} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{44}{-44} = -1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-44}{-44} = 1$$

Решением системы уравнений является тройка чисел

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 1$$

Замечание. Метод Крамера на практике почти не используется, так как при большом числе уравнений количество числовых операций, необходимых для решения системы уравнений очень велико.

2. **Решение систем линейных уравнений методом Гаусса**.

Количество численных операций в методе Гаусса приблизительно равно количеству операций необходимых для вычисления одного определителя. Поэтому этот метод используется чаще.

Метод состоит из двух проходов: прямом проходе и обратном проходе. На прямом проходе система преобразуется таким образом, чтобы матрица коэффициентов при неизвестных стала треугольной.

На обратном проходе происходит поочередное вычисление переменных.

Рассмотрим метод Гаусса на примере решения системы из трех уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Прямой проход.

Шаг №1. Первое уравнение оставим без изменений, а второе и третье преобразуем так, чтобы коэффициенты при x_1и x_2 равнялись 0. Для этого, второе и третье уравнения умножим соответственно на

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \text{ и } \frac{a_{11}}{a_{31}}$$

После этой операции при x_1 будет стоять коэффициент a_{11}т.е точно такой же как и в первом уравнении. Вычтем из первого уравнения второе уравнение и результат оставим на месте второго уравнения. Вычтем из первого уравнения третье уравнение и результат оставим на месте второго уравнения. Получим систему следующего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Первые два уравнения оставим без изменения, а третье преобразуем так, чтобы коэффициент при x_2 равнялся 0. Для этого третье уравнение умножим на

$$\frac{a_{22}}{a_{32}}$$

и вычтем из второго. В итоге получится система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Замечание. При проведении преобразований, коэффициенты при неизвестных меняются. Поэтому, например, a_{33} в исходной системе линейных уравнений отличен от этого же коэффициента во последующих системах.

Обратный проход.

Из третьего уравнения последней системы находим x_3.

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} \qquad (1)$$

Подставляем во второе уравнение

$$a_{22}x_2 + a_{23}\frac{b_3}{a_{33}} = b_2$$

Находим из этого уравнения неизвестную x_2

$$x_2 = \frac{\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right)}{a_{22}} \qquad (2)$$

Подставляем найденные значения x_2и x_3 в первое уравнение последней системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}\frac{\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right)}{a_{22}} + a_{13}\frac{b_3}{a_{33}} = b_1$$

Из последнего уравнения находим x_1

$$x_1 = \frac{\left(b_1 - a_{13}\frac{b_3}{a_{33}} - a_{12}\frac{\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right)}{a_{22}}\right)}{a_{11}} \qquad (3)$$

Таким образом, найдены значения для всех трех неизвестных x_1, x_2, x_3 в формулах (3), (2), (1).

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Прямой ход

Первое уравнение оставляем без изменений. Второе уравнение умножаем на 2/3, а третье уравнение умножаем на 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + \frac{8}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

Из первого уравнения вычитаем второе и третье. Заметим, что после этого, во втором и третьем уравнениях пропадет первое слагаемое.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -\frac{11}{3}x_2 - \frac{13}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ -11x_2 - 5x_3 = +6 \end{cases}$$

Первые два уравнения оставляем без изменения, а третье умножаем на 1/3.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -\frac{11}{3}x_2 - \frac{13}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ -\frac{11}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 2 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычитаем третье.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -\frac{11}{3}x_2 - \frac{13}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3}x_3 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим x_3. Очевидно,

$$x_3 = 1$$

Подставляем это значение во второе уравнение.

$$-\frac{11}{3}x_2 - \frac{13}{3} = -\frac{2}{3}$$

Находим x_2

$$-\frac{11}{3}x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{13}{3}$$

$$-\frac{11}{3}x_2 = +\frac{11}{3}$$

Очевидно,

$$x_2 = -1$$

Подставляем значения найденных неизвестных в первое уравнение.

$$2x_1 + 1 - 3 = 0$$

$$2x_1 = 2$$

Очевидно,

$$x_1 = 1$$

Заметим, что такое же решение было получено, когда эта система решалась методом Крамера.

3. **Решение систем 3-х линейных уравнений методом обратной матрицы**.

Заметим, что систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

или, в более краткой форме

$$A \cdot X = B \qquad\qquad (*)$$

где,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Умножим обе части выражения (*) на матрицу A^{-1}(обратную к матрице A).

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Так как произведение матрицы на обратную (и наоборот) есть единичная матрица

$$A^{-1} \cdot A = E$$

а произведение единичной матрицы на вектор есть сам вектор

$$E \cdot X = X$$

Получаем формулу для вычисления корней системы линейных уравнений при помощи обратной матрицы.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Из этой формулы следует, что нахождение решения системы линейных уравнений сводится к нахождению матрицы, обратной к матрице из коэффициентов уравнения и умножения ее на столбец свободных членов.

Пример. Решить систему методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Выпишем матрицу из коэффициентов системы уравнений.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу обратную к данной по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Сначала находим определитель

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 45 + 12 - 20 + 3 = -44$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} -6 & -14 & 10 \\ -1 & 5 & -13 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} -6 & -14 & 10 \\ -1 & 5 & -13 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-44} \cdot \begin{pmatrix} -14 - 30 \\ 5 + 39 \\ -11 - 33 \end{pmatrix} = \frac{1}{-44} \cdot \begin{pmatrix} -44 \\ 44 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решением системы уравнений является тройка чисел

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 1$$