$ $ $x^{2}∙log\_{512}\left(x+7\right)\leq log\_{2}(x^{2}+14x+49)$

$Решение:$

------------------------------------------------------------------------------------------

Область допустимых значений х:

$\left\{\begin{array}{c}x+7>0\\ x^{2}+14x+49>0\end{array}\right. ⟺ \left\{\begin{array}{c}x+7>0\\ \left(x+7\right)^{2}>0\end{array}\right. ⟺ \left\{\begin{array}{c} x>-7\\x\ne -7\end{array}\right. ⟺ x>-7$

* $(x+7)^{2}\geq 0-так как a^{2}\geq 0, но в нашем случае \left(x+7\right)^{2}>0,$

$ поэтому (x+7)^{2}\ne 0 ⟺ x+7\ne 0 ⟺ x\ne -7$

------------------------------------------------------------------------------------------

$x^{2}∙log\_{2^{9}}\left(x+7\right)\leq log\_{2}(x+7)^{2}$

* По свойству логарифмов:

$log\_{a^{n}}b=\frac{1}{n}∙log\_{a}b$

$log\_{a}b^{n}=n∙log\_{a}b$

Если n – четное число, то добавляется модуль, при нечетных n нет модуля

$x^{2}∙\frac{1}{9}∙log\_{2}(x+7)\leq 2∙log\_{2}|x+7|$

* $Согласно ОДЗ, x>-7, поэтому \left|x+7\right| раскрывается как (x+7)$

$Если было бы x<-7, то \left|x+7\right| раскрывался бы как (-x-7)$

$\frac{x^{2}}{9}∙log\_{2}\left(x+7\right)-2∙log\_{2}\left(x+7\right)\leq 0$

* Выносим за скобки общий множитель $- log\_{2}(x+7)$

$log\_{2}\left(x+7\right)∙(\frac{x^{2}}{9}-2)\leq 0$

$log\_{2}\left(x+7\right)∙(\frac{x^{2}-18}{9} )\leq 0$

$log\_{2}\left(x+7\right)∙(x^{2}-18)\leq 0$

* Применим метод рационализации:

 $log\_{f(x)}g\left(x\right)∨0 ⟺ (f\left(x\right)-1)∙\left(g\left(x\right)-1\right)∨0$

$(2-1)∙(x+7-1)∙(x^{2}-18)\leq 0$

$(x+6)∙(x^{2}-18)\leq 0$

* Формула разности квадратов:

$a^{2}-b^{2}=(a-b)∙(a+b)$

$(x+6)∙(x-3\sqrt{2})∙(x+3\sqrt{2})\leq 0$

 Применим метод интервалов:

-----------$[-6]$+++++++$[-3\sqrt{2}]$---------$[3\sqrt{2}]$+++++++> x

$x\in (-\infty ;-6]∪[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}]$

$С учетом ОДЗ:$ $x\in (-7;-6]∪[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}]$

Ответ: $(-7;-6]∪[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}].$