

Лекция №1

Работа с матрицами.

1. Основные понятия.

Определение. Матрицей размерности $m \times n$ называется таблица пронумерованных чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Исходя из такого определения матрицы, можно сделать вывод, что a_{ij} – это элемент матрицы, стоящий на пересечении i -й строки и j -того столбца. Другими словами, первый индекс указывает на строку матрицы, а второй индекс указывает на столбец матрицы.

Количество строк и столбцов матрицы называется размерностью.

Пример. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет две строки и три столбца, т.е. размерность 2×3 . Пронумерованные элементы этой матрицы будут выглядеть так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} = 2 & a_{12} = -3 & a_{13} = 1 \\ a_{21} = 7 & a_{22} = 0 & a_{23} = 4 \end{pmatrix}$$

Пример. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет три строки и два столбца, т.е. размерность 3×2 . Пронумерованные элементы этой матрицы будут выглядеть так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} = -1 & a_{12} = 0 \\ a_{21} = 5 & a_{22} = 4 \\ a_{31} = 3 & a_{32} = 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. В частном случае, матрица может состоять из одной строки или одного столбца. В этом случае матрицу называют вектором.

Пример.

$$A = (3 \quad -2 \quad 5), \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

В этом примере матрица A - это матрица-строка, матрица B - это матрица-столбец. По иному, A и B - это вектора.

Определение. Матрица $\bar{A}$ называется транспонированной матрицей по отношению к матрице A , если ее строки являются столбцами матрицы A , а ее столбцы являются строками матрицы A .

Пример матрицы и ее транспонированной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица называется квадратной, если количество строк и столбцов матрицы совпадает.

Пример квадратной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

В данном примере матрица A это квадратная матрица 3×3 .

Квадратная матрица характеризуется тем, что имеет две диагонали. Главная диагональ от левого-верхнего до правого-нижнего элементов. Вспомогательная диагональ от левого-нижнего до правого-верхнего элементов.

Например, в предыдущем примере числа 3, 5, -4 стоят на главной диагонали, а числа 7, 5, 1 стоят на вспомогательной диагонали.

Определение. Матрица называется треугольной, если все элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали равны 0.

Пример треугольных матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

У матрицы A все элементы, которые стоят выше главной диагонали равны нулю, а у матрицы B все элементы, которые стоят ниже главной диагонали равны нулю.

Определение. Матрица называется диагональной, если все ненулевые элементы, находятся на главной диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Определение. Диагональная матрица, у которой на диагонали стоят единицы, называется единичной.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица называется симметричной, если элементы симметричны относительно главной диагонали. Другими словами, для симметричной матрицы верно условие

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Пример симметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Операции над матрицами.

Определение. Суммой двух матриц A и B называется матрица C каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов складываемых матриц.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Замечание. Как видно из определения, складывать можно только матрицы одинакового размера.

Пример на сложение матриц.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Определение. Произведением матрицы A на число λ называется матрица C каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ .

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример на умножение матрицы на число.

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 10 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Следствие. Разностью двух матриц A и B называется матрица C каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов вычитаемых матриц.

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример на вычитание матриц.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Определение. Произведением двух матриц A и B называется матрица C каждый элемент которой равен сумме произведений элементов строки матрицы A на элементы столбца матрицы B .

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{m1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{m2}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{m1}$$

...

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{mj}$$

Другими словами, для того чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -того столбца надо взять i -ю строку первой матрицы и j -тый столбец второй матрицы. Почленно их перемножить, а затем сложить.

Пример на умножение матриц.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 7 + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 33 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

Замечание. Не всякие матрицы можно перемножить. Для того, чтобы перемножить две матрицы количество столбцов первой матрицы должно равняться количеству строк второй.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если их произведение равно единичной матрице.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Определители матриц.

Определение. Определителем матрицы размерности 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 15 + 14 = 29$$

Определение. Определителем матрицы размерности 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \cdot (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - (-3) \cdot 5 \cdot 0 - (-4) \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$-24 + 30 + 6 - 8 = 4$$

Замечание. Не существует подобной формулы для вычисления определителя матрицы более высокого порядка. Поэтому для вычисления определителей более высокого порядка используется иной подход.

4. Миноры и алгебраические дополнения.

Определение. Минором M_{ij} квадратной матрицы A размерности n называется определитель матрицы размерности $n - 1$, которая получается из исходной удалением i -ой строки и j -того столбца.

Пример. Вычислить минор M_{23} матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Удалим из матрицы 2-ю строку и 3-й столбец

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & \times \\ \times & \times & \times \\ 1 & 5 & \times \end{pmatrix}$$

Посчитаем определитель оставшейся матрицы

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = -15 + 1 = -14$$

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} квадратной матрицы A называется минор M_{ij} взятый со знаком «+», если сумма номеров строки и столбца число четное и взятый со знаком «-», если сумма номеров строки и столбца число нечетное.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Например,

$$A_{23} = -M_{23}, \quad A_{22} = M_{22}$$

Теорема. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения.

Формула для вычисления определителя с использованием i -ой строки

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Формула для вычисления определителя с использованием i -того столбца

$$\det(A) = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + a_{3i}A_{3i} + \dots + a_{ni}A_{ni}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы при помощи алгебраических дополнений.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Для вычисления определителя будем использовать 2-ю строку.

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \\ 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ -2 \cdot (4 - 15) - 2 \cdot (12 - 3) &= 22 - 18 = 4\end{aligned}$$

5. Вычисление обратной матрицы.

Теорема. Для вычисления обратной матрицы может быть использована следующая формула.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Для 3-х мерной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Пример. Вычислить матрицу обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Определитель этой матрицы мы вычислили в предыдущем примере. Он равен $\det(A) = 4$. Посчитаем алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned}A_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 11 & A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 & A_{22} &= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 12 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 & A_{33} &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8\end{aligned}$$

Получаем обратную матрицу в виде

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 11 & 6 \\ 8 & 9 & 6 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{11}{4} & \frac{6}{4} \\ 2 & \frac{9}{4} & \frac{6}{4} \\ 3 & \frac{14}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

Проверим, правильно ли мы вычислили обратную матрицу. Для этого исходную матрицу надо умножить на обратную, если получим единичную матрицу, то расчет выполнен верно.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & \frac{11}{4} & \frac{6}{4} \\ 2 & \frac{9}{4} & \frac{6}{4} \\ 3 & \frac{14}{4} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 2 + 9 & -\frac{33}{4} - \frac{9}{4} + \frac{42}{4} & -\frac{18}{4} - \frac{6}{4} + \frac{24}{4} \\ 4 - 4 + 0 & \frac{22}{4} - \frac{18}{4} & \frac{12}{4} - \frac{12}{4} \\ 2 + 10 - 12 & \frac{11}{4} + \frac{45}{4} - \frac{56}{4} & \frac{6}{4} + \frac{30}{4} - \frac{32}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$