



ЗАДАЧА

Є прямокутний лист жерсті розміром 70х50 см. Треба виготовити з нього відкриту зверху коробку найбільшої місткості, вирізавши по кутах квадрати й загнувши краї. Якою повинна бути довжина сторони такого квадрата?

Розв'язання

Позначимо через x довжину сторони квадрата, що вирізають. Очевидно, що $0 \leq x \leq 25$. Об'єм коробки (прямокутного паралелепіпеда) дорівнює добутку площі основи на висоту. За вказаного способу виготовлення коробки її основа — прямокутник зі сторонами $70 - 2x$ і $50 - 2x$, а висота коробки — x . Відповідно об'єм коробки дорівнює:

$$V(x) = (70-2x)(50-2x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3500x.$$

Задачу зведено до знаходження найбільшого значення функції на проміжку $[0; 25]$. Знайдемо критичні точки функції $V(x)$

$$V(x) = (70-2x)(50-2x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3500x.$$

$$12x^2 - 480x + 3500 = 0$$

$$3x^2 - 120x + 875 = 0$$

$$D = 14400 - 4 \cdot 3 \cdot 875 = 3900$$

$$x_1 = (120 - \sqrt{3900})/6 = 20 - 5\sqrt{39}/3 \approx 9,59$$

$$x_2 = (120 + \sqrt{3900})/6 = 20 + 5\sqrt{39}/3 \approx 30,41$$

Інших критичних точок функція на має, оскільки похідна існує для всіх x .

Проміжку $[0; 25]$ належить лише одна точка $x = 20 - 5\sqrt{39}/3$. Обчислимо значення функції $V(x)$ у цій точці й на кінцях проміжку:

$$V(20 - 5\sqrt{39}/3) \approx 15020,55. \quad V(0) = 0. \quad V(25) = 0$$

Отже, найбільшого значення функція набуває на проміжку $[0; 25]$ в точці $20 - 5\sqrt{39}/3$. Це означає, що коробку найбільшого об'єму можна виготовити, вирізавши по кутах заданого листа жерсті квадрат зі стороною $20 - 5\sqrt{39}/3$ см.

Відповідь. $20 - 5\sqrt{39}/3$ см $\approx 9,59$ см