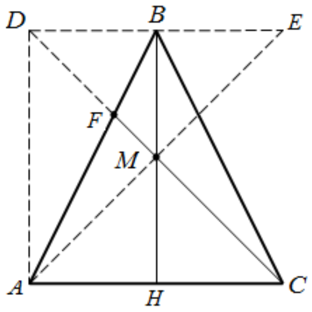
В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит апофему грани *ASB* в отношении 1:2, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.



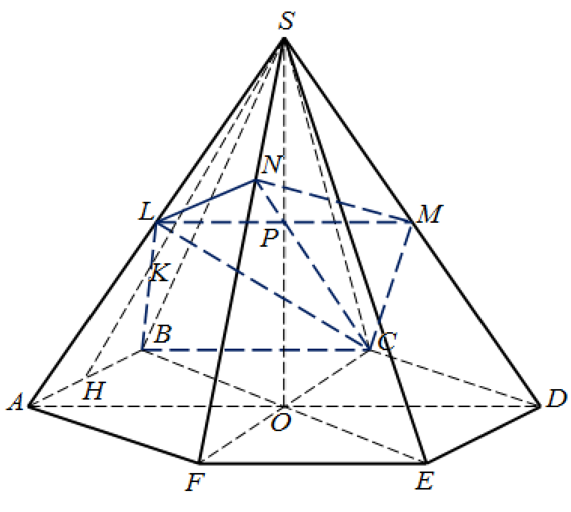
Сначала решим следующую задачу. В равнобедренном треугольнике *ABC* $AB = BC$, *M* – середина высоты *BH*, *F* – точка пересечения *CM* с *AB*. Найти отношение $AF : FB$.

<u>Первый способ</u>. По теореме Менелая $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BM}{MH} \cdot \frac{HC}{CA} = 1$.

$\frac{BM}{MH} = 1$; $\frac{HC}{CA} = \frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{AF}{FB} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow AF : FB = 2:1$.

<u>Второй способ</u>. Через вершину *B* проводим прямую, параллельную основанию *AC*. Продолжаем прямую *CF* до пересечения с этой прямой в точке *D*. Через точки *A* и *M* проводим прямую, пересекающую *DB* в точке *E*.

Прямоугольные треугольники *MBE* и *MHA* с прямыми углами *MBE* и *MHA* равны, т.к. $BM = MH$ по условию, а $\angle BME = \angle AMH$ как вертикальные. Поэтому $BE = AH$ и $AM = ME$. Аналогично доказывается, что $DB = CH$, а т.к. $CH = AH$, то $DB = BE$. Т.к. $DB = BE$, а $AM = ME$, то *DM* и *AB* – медианы треугольника *ABE*, пересекающиеся в точке *F* и, значит $AF : FB = 2:1$.



Переходим к основной задаче. Рисунок получился не самый удачный, но, думаю всё можно понять!

а) *L* и *M* – середины рёбер *SA* и *SD* соответственно, *α* – плоскость, проходящая через точки *C*, *L*, *M*. *LM* – средняя линия треугольника *ASD*, поэтому $LM \parallel AD$, и т.к. $BC \parallel AD$, то $LM \parallel BC$. Поэтому прямая *BC* лежит в одной плоскости с прямыми *LM* и *CM*, т.е. – в плоскости *α*. Точки *B* и *L* принадлежат плоскости *α* и, значит, прямая *BL* лежит в плоскости *α*. *SH* – апофема боковой грани *ASB* и поэтому – медиана треугольника *ASB*. Т.к. *L* – середина ребра *SA*, то *BL* – тоже медиана треугольника *ASB*. *BL* и *SH* пересекаются в точке *K*, поэтому $SK : KH = 2:1$. $K \in BL \Rightarrow K \in \alpha$, т.е. плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит апофему грани *ASB* в отношении 2:1 (а не 1:2!).

б) *P* – точка пересечения высоты пирамиды *SO* с прямой *LM*, значит, $P \in \alpha$ и т.к. *LM* – средняя линия треугольника *ASD*, то *P* – середина высоты *SO*, которая является одновременно высотой равностороннего (а значит, и равнобедренного) треугольника *CSF*. Прямая *CP*, лежащая в плоскости *α*, пересекает боковое ребро *SF* в точке *N* (плоскость *α* пересекает ребро *SF* в точке *N*). Из решённой ранее задачи $FN : NS = 2:1$ или $SN : NF = 1:2$. Таким образом, отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S, равно 1:2.

На рисунке прямые, лежащие в плоскости α, выделены синим цветом, но это – не <u>сечение пирамиды плоскостью α</u>! Чтобы построить сечение, нужно найти ещё точки пересечения плоскости α с боковыми рёбрами SC и SE, но в этом нет необходимости!