https://znanija.com/task/28166626

1. Решить задачу Коши: y'+x⁴ = 0; y(1) = 1
2. Решить уравнение: $xdy + (x + 2y)dx = 0$
3. Решить уравнение: $(1 + x)(y' - y) = e^x$

1.

$$y' + x^4 = 0; \quad y(1) = 1$$

Уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = -x^4$$

$$dy = -x^4\,dx$$

$$\int dy = -\int x^4\,dx$$

$$y = -\frac{x^5}{5} + K$$

Из начального условия находим константу K.

$$y(1) = -\frac{1^5}{5} + K = -\frac{1}{5} + K = 1$$

$$K = \frac{1}{5}$$

Итого

ОТВЕТ: $y(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{1}{5}$

2.

$$x\,dy + (x + 2y)\,dx = 0$$

приведём уранение к однородному виду. Разделим обе части на $\frac{dx}{x}$

$$\frac{dy}{dx} + 1 + \frac{2y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 - 2\cdot\frac{y}{x} \qquad [2]$$

Вводим новую функцию z.

$$y = z\cdot x$$

$$y' = z'x + z$$

Подставим в уравнение [2] и доводим его до уравнения с разделяющимися переменными.

$$z'x+z=-1-2\frac{zx}{x}=-1-2z$$
$$z'x=-1-3z=-(1+3z)$$
$$\frac{dz}{1+3z}=-\frac{dx}{x}$$
Теперь можно интегрировать.

$$\int\frac{dz}{1+3z}=-\int\frac{dx}{x}=-\ln(x)+\ln K$$
$$\frac{1}{3}\ln(1+3z)=-\ln(x)+\ln K$$
$$\ln(1+3z)=-3\cdot\ln(x)+\ln\widetilde{K}$$
$$1+3z=\frac{\widetilde{K}}{x^3}$$

$$z=\frac{\widetilde{K}}{x^3}-\frac{1}{3}$$
Тут конечно надо было $\frac{\widetilde{K}}{3}x^3$, но константа произвольная можем считать что новая констата $\widetilde{K}=\frac{\widetilde{K}}{3}$.

Возвращаемся к функции *y*.

$$z=\frac{y}{x}=\frac{\widetilde{K}}{x^3}-\frac{1}{3}$$

ОТВЕТ: $y=\frac{\widetilde{K}}{x^3}-\frac{x}{3}$ $\quad где\,\widetilde{K}\ \ произвольная\ \ постоянная$

3.

$$(1+x)(y'-y)=e^x$$
Делим обе части на $(1+x)$

$$y'-y=\frac{e^x}{1+x} \qquad [3]$$
Дифференциальное уравнение 1-го порядка линейное, неоднородное, с постоянными коэффициентами.

Сначала решим соответствующее однородное (без правой части), а затем применим метод вариации постоянной.

Итак, ищем решение уравнения безправвой части.

$y'-y=0$

Состави характеритическое уравнение и найдём его корни (тут он один)

$\lambda-1=0$

$\lambda=1$

Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$y=C\,\mathrm{e}^{\lambda x}$

Т.е.

$y=C\,\mathrm{e}^{x}$

Теперь применим метод вариации постоянной. Считаем C не постоянной, а функцией $C(x)$.

Тогда решение буде иметь вид:

$y=C(x)\,\mathrm{e}^{x}$ [4]

Первая производная его

$y=C'(x)\,\mathrm{e}^{x}+C(x)\,\mathrm{e}^{x}$

Подставим это функцию и её производную в уравнение [3]. Получаем

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{x}+C(x)\,\mathrm{e}^{x}-C(x)\,\mathrm{e}^{x}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+x}$$

Приводим подобные слагаемые и сокращаем на e^{x} (она не равна нулю).

$$C'(x)=\frac{1}{1+x}$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем.

$$\int dC=\int\frac{dx}{1+x}+K$$

$C=\ln(1+x)+K$ [5]

Подставиим [5] в [4] Получаем общее решение исходного уранения (Правда, мы делили на x+1, Значит долно быть ещё выполнено $x\neq-1$, ну это и так будет от логарифма)

ОТВЕТ: $y(x)=(\ln(1+x)+K)\,\mathrm{e}^{x}$