$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2$$

$$1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 > \frac{a}{2}\sin 2x$$

$$(\sin 2x)^2 + a \cdot \sin 2x - 2 < 0$$

$$\sin 2x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$$

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} < \sin 2x < \frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}$$

Для того чтобы неравенство соблюдалось для всех x, нужно чтобы:

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2} > 1 \quad и \quad \frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} < -1$$

$-a + \sqrt{a^2+8} > 2$ и $-a - \sqrt{a^2+8} < -2$

$\sqrt{a^2+8} > a+2 \quad /\wedge 2$

$a^2+8 > a^2+4a+4$

$4a < 4$

$\boxed{a < 1}$

$a + \sqrt{a^2+8} > 2$

$\sqrt{a^2+8} > 2-a \quad /\wedge 2$

$a^2+8 > a^2-4a+4$

$4a > -4$

$\boxed{a > -1}$

$$\boxed{a \in (-1; 1)}$$