

Лекция №3

Вектора и линейные операции над ними.

1. Понятие вектора.

При изучении различных разделов физики, механики и технических наук встречаются величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений. Такие величины называются *скалярными* или, короче, *скалярами*.

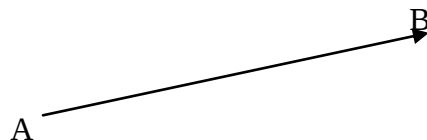
Скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др. Помимо скалярных величин, в различных задачах встречаются величины, для определения которых, кроме числового значения, необходимо знать также их направление. Такие величины называются *векторными*. Физическими примерами векторных величин могут служить смещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на нее сила.

Векторные величины изображаются с помощью векторов.

Определение вектора. Вектором называется направленный отрезок прямой, имеющий определенную длину.

Вектор характеризуется двумя точками. Одна точка – это точка начала вектора, другая точка – это точка конца вектора. Если обозначить начало вектора точкой A , а конец вектора точкой B , то сам вектор обозначается $\overline{AB}$. Вектор можно обозначать и одной малой латинской буквой с чертой над ней (например, $\vec{a}$).

Графически, вектор обозначается отрезком со стрелкой на конце.



Начало вектора называют *точкой его приложения*. Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то мы будем говорить, что вектор приложен в точке A .

Вектор характеризуется двумя величинами: длиной и направлением.

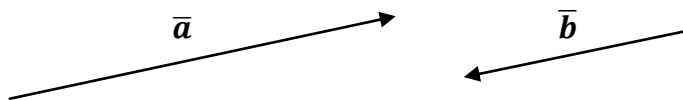
Длина вектора $\overline{AB}$ – расстояние между точками начала A и конца B . Другое название длины вектора – модуль вектора и обозначается символом $|\overline{AB}|$. Модуль вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$. Вектор, длина которого равна 1, называется единичным вектором. Т.е., условие для единичного вектора

$$|\vec{a}| = 1$$

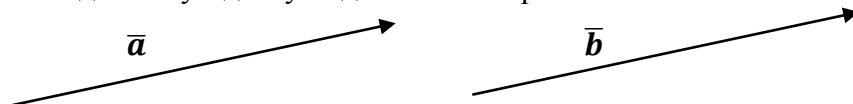
Вектор с нулевой длиной называется нулевым вектором (обозначается $\vec{0}$). Очевидно, что у нулевого вектора совпадают точки начала и конца. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение коллинеарных векторов. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ расположенные на одной прямой или на параллельных прямых называются коллинеарными.

Заметим, что коллинеарные вектора могут иметь разную длину и разное направление.



Определение равных векторов. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.



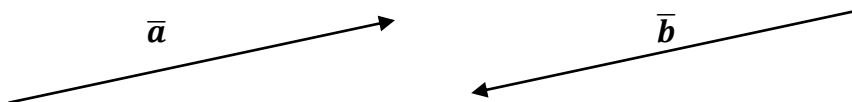
В этом случае пишут:

$$\vec{a} = \vec{b}$$

Замечание. Из определения равенства векторов следует, что вектор можно параллельно переносить, помещая его начало в любую точку пространства (в частности, плоскости).

Все нулевые векторы считаются равными.

Определение противоположных векторов. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются противоположными, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину, но противоположное направление.



В этом случае пишут:

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

Другими словами, вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается как $-\vec{a}$.

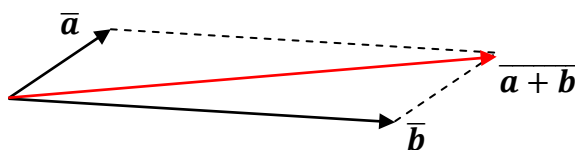
2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями называются операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Определение суммы векторов (№1). Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, который получается следующим образом.

- Начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаются в одну общую точку.
- Полученный угол достраивается до параллелограмма.

Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ начинается в общей точке векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а заканчивается в противоположной точке параллелограмма

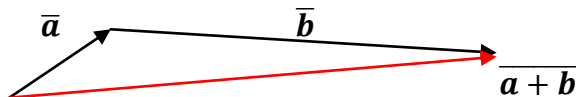


Возможно другое определение суммы векторов.

Определение суммы векторов (№2). Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, который получается следующим образом.

- Начало вектора $\vec{b}$ помещается в конец вектора $\vec{a}$.

Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ начинается в начале вектора $\vec{a}$ и заканчивается в конце вектора $\vec{b}$.



Очевидно, что оба определения задают один и тот же вектор.

Из первого определения следует очевидное равенство

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Кроме того, для суммы векторов верно следующее свойство (сочетательное свойство)

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

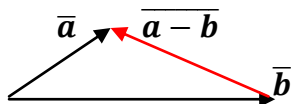
Второе определение суммы векторов дает возможность определить сумму произвольного числа векторов. При суммировании произвольного числа векторов начало каждого последующего вектора помещается в конец предыдущего. Итоговый вектор суммы будет соединять начало первого вектора и конец последнего вектора.



Определение разности векторов. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} - \vec{b}$, который получается следующим образом.

- Начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаются в одну общую точку.

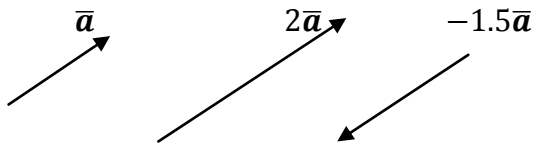
Вектор $\vec{a} - \vec{b}$ начинается в конце вектора $\vec{b}$, а заканчивается в конце вектора $\vec{a}$.



Определение произведения вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который обладает следующими свойствами.

- Вектора $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарные вектора.
- Вектор $\lambda\vec{a}$ направлен в ту же сторону что и вектор $\vec{a}$, если λ положительное число и в противоположную сторону, если число λ отрицательное.
- Длина вектора $\lambda\vec{a}$ равна длине вектора $\vec{a}$ умноженной на модуль λ

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$



Операция умножения вектора на число обладает следующими очевидными свойствами

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{a}$$

$$\lambda_1(\lambda_2\bar{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\bar{a}$$

Заметим, что в результате умножения вектора на число получается вектор коллинеарный по отношению к исходному вектору.

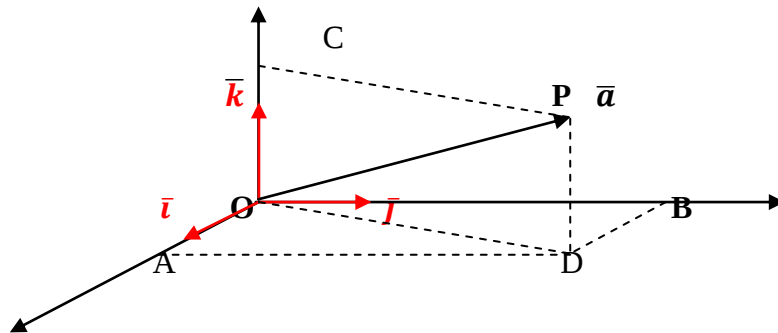
3. Декартова система координат.

Рассмотрим тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Имеет место следующее утверждение.

Для произвольного вектора $\bar{a}$ существует тройка чисел x, y, z со следующим свойством

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Другими словами, любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации трех взаимно перпендикулярных единичных векторов. Тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется базисом в декартовой системе координат. Тройка чисел x, y, z называется координатами вектора $\bar{a}$ в декартовой системе координат.



Заметим, что вектор $\overline{OA}$ и вектор $\bar{i}$ отличаются только длинами. Поэтому можно записать

$\overline{OA} = x\bar{i}$, где x – некоторое число. Аналогично $\overline{OB} = y\bar{j}$, $\overline{OC} = z\bar{k}$. Поэтому имеем

$$\bar{a} = \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OC} + \overline{OA} + \overline{OB} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Предположим, что точка P – конец вектора $\bar{a}$. В этом случае числа x, y, z называются координатами точки P. Над координатами точки можно проделывать такие же операции как над координатами вектора.

4. Операции над векторами в координатах векторов.

4.1. Сложение векторов.

Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (a_x, a_y, a_z) , а вектор $\bar{b}$ имеет координаты (b_x, b_y, b_z) вектор суммы $\bar{a} + \bar{b}$ имеет координаты $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

Пример. Найти сумму векторов $\bar{a} = (1, -3, 2)$ и $\bar{b} = (-2, 5, 6)$.

$$\bar{a} + \bar{b} = (1 - 2, -3 + 5, 2 + 6) = (-1, 2, 8)$$

4.2. Вычитание векторов.

Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (a_x, a_y, a_z) , а вектор $\bar{b}$ имеет координаты (b_x, b_y, b_z) вектор разности $\bar{a} - \bar{b}$ имеет координаты $(a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$

Пример. Найти разность векторов $\bar{a} = (4, 3, -2)$ и $\bar{b} = (3, -5, 1)$.

$$\bar{a} - \bar{b} = (4 - 3, 3 + 5, -2 - 1) = (1, 8, -3)$$

4.3. Умножение вектора на число.

Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (a_x, a_y, a_z) , вектор $\lambda\bar{a}$ произведения вектора $\bar{a}$ на число λ имеет координаты $(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Пример. Найти произведение вектора $\bar{a} = (-5, 4, 2)$ на число 3.

$$3\bar{a} = (-15, 12, 6)$$

Пример. Даны два вектора $\bar{a} = (-4, 3, 2)$ и $\bar{b} = (1, -7, 3)$. Найти $2\bar{a} - 3\bar{b}$

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = (-8 - 3, 6 + 21, 4 - 9) = (-11, 27, -5)$$

4.4. Задание вектора двумя точками.

Пусть вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ т.е. задан точками $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z)$ (в скобках указаны координаты точек). В этом случае для того, чтобы найти координаты вектора надо от координат конца вектора вычесть координаты начала вектора.

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

Пример. Даны две точки $A(-4, 2, 6)$ и $B(1, 7, 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = (1 + 4, 7 - 2, 3 - 6) = (5, 5, -3)$$

4.5. Координаты центральной точки.

Пусть заданы две точки $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z)$ (в скобках указаны координаты точек). Любая точка $C(c_x, c_y, c_z)$, лежащая на отрезке между этими точками может быть задана числом α следующим образом

$$c_x = (1 - \alpha)a_x + \alpha b_x$$

$$c_y = (1 - \alpha)a_y + \alpha b_y$$

$$c_z = (1 - \alpha)a_z + \alpha b_z$$

В частности при $\alpha = 0$ получается точка А, $\alpha = 1$ получается точка В, а при $\alpha = 0.5$ получается точка, лежащая строго по центру отрезка.

Пример. Даны две точки $A(-4, 2, 6)$ и $B(1, 7, 3)$. Найти координаты С - центра отрезка $[A, B]$

$$C = \left(\frac{-4 + 1}{2}, \frac{2 + 7}{2}, \frac{6 + 3}{2} \right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

4.6. Длина вектора.

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) , то длина вектора определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Из этой формулы следует, что если вектор $\vec{AB}$ задан точками $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z)$, то его длина может быть вычислена по формуле:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

Пример. Даны две точки $A(-4, 3, -2)$ и $B(0, -7, 1)$. Найти длину вектора $\vec{AB}$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(0 + 4)^2 + (-7 - 3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{16 + 100 + 9} = \sqrt{125}$$

4.7. Условие коллинеарности векторов.

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_x, a_y, a_z) , а вектор $\vec{b}$ имеет координаты (b_x, b_y, b_z) . Если вектора коллинеарные, то найдется такое число λ , при котором выполняется

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Или в координатах

$$(a_x, a_y, a_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)$$

Следовательно

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z$$

Находим λ :

$$\lambda = \frac{a_x}{b_x}, \quad \lambda = \frac{a_y}{b_y}, \quad \lambda = \frac{a_z}{b_z}$$

Получаем условие коллинеарности векторов:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Пример. Найти значение числа α , при котором коллинеарны вектора $(-1, 3, 2)$ и $(3, -9, \alpha)$.

$$\frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} = \frac{\alpha}{2}$$

Получаем $\alpha = -6$

5. Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов называется число равное произведению векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

Замечание. Из этой формулы с очевидностью следует, что величина скалярного произведения не зависит от порядка векторов в произведении.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Если вектора заданы координатами, т.е. вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_x, a_y, a_z) , а вектор $\vec{b}$ имеет координаты (b_x, b_y, b_z) , то скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Пример. Вычислить скалярное произведение между векторами $\vec{a} (-4, 2, 6)$ и $\vec{b} (1, 7, 3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 3 = -4 + 14 + 18 = 28$$

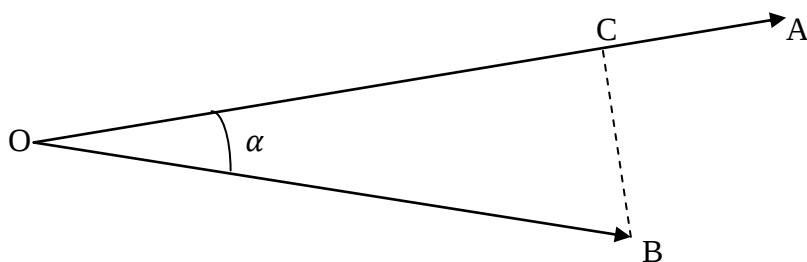
Из формулы скалярного произведения следует широко используемая формула для вычисления угла между векторами

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Или в векторной форме с подстановкой формул для вычисления длины

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Геометрический смысл скалярного произведения.



$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos(\alpha) = |\vec{OA}| |\vec{OC}|$$

Вектор OC – это проекция вектора OB на вектор OA. Следовательно, скалярное произведение векторов это произведение длины первого вектора на длину проекции второго вектора на первый.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

Так как в скалярном произведении порядок векторов не важен, то можно записать

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$

Из последней формулы получаем выражения для вычисления проекций одного вектора на другой.

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Условие перпендикулярности векторов.

Из определения скалярного произведения видно, что если угол между векторами равен нулю, т.е. вектора перпендикулярны, то скалярное произведение равно нулю. Из этого следует условие перпендикулярности векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Или

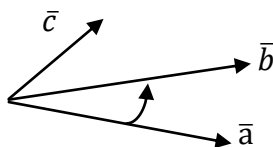
$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

6. Векторное произведение.

Прежде чем дать определение векторного произведения, необходимо ввести понятие, связанное с взаимной ориентации векторов.

Определение правой тройки векторов.

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется правой, если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки со стороны вектора $\vec{c}$.



Определение левой тройки векторов.

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется левой, если она не правая.

Замечание. Если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, то правыми являются следующие тройки векторов $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$.

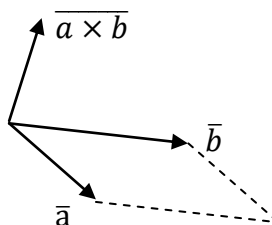
Замечание. Тройка базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартовой системы координат правая.

Определение векторного произведения.

Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор со следующими свойствами.

- Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет такое направление, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ «правая».
- Длина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус углов между ними.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$



Замечание. Из формулы для нахождения длины векторного произведения следует, что длина векторного произведения численно равна площади параллелограмма построенного на перемножаемых векторах. Эта формула в дальнейшем будет использована для нахождения площади треугольника (половины площади параллелограмма).

Определение векторного произведения в координатах векторов.

Пусть (a_x, a_y, a_z) - это координаты вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат, (b_x, b_y, b_z) - это координаты вектора $\vec{b}$ в декартовой системе координат. Векторное произведение, т.е. вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет вид

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

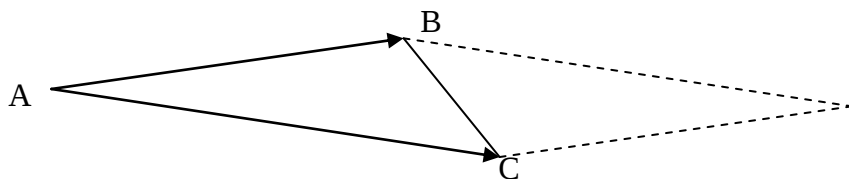
Пример. Даны два вектора $\vec{a}(-1, 2, 5)$, $\vec{b}(3, -1, 2)$. Найти векторное произведение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{i} + 17\vec{j} - 5\vec{k}$$

Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет координаты $(9, 17, -5)$.

Вычисление площади треугольника, заданного координатами трех точек.

Пусть некоторый треугольник задан тремя своими вершинами A, B, C . Рассмотрим два вектора $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.



Из определения векторного произведения следует, что если перемножить эти вектора при помощи векторного произведения, то получим вектор с длиной равной площади параллелограмма,

построенного на этих векторах. Площадь искомого треугольника равна половине площади этого параллелограмма. Получаем формулу для вычисления площади

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2}$$

Пусть вершины треугольника имеют следующие координаты

$A(a_x, a_y, a_z), B(b_x, b_y, b_z), C(c_x, c_y, c_z)$, тогда вектора, построенные на этих точках, имеют координаты $\overline{AB}(b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z), \overline{AC}(c_x - a_x, c_y - a_y, c_z - a_z)$. Учитывая формулу для вычисления векторного произведения, получаем формулу для вычисления площади треугольника.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix} \right|$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1, 3, 2), B(2, 1, 0), C(1, 3, 5)$.

Находим вектора

$$\overline{AB}(3, -2, -2), \quad \overline{AC}(2, 0, 3)$$

Находим векторное произведение

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \bar{k} = -6\bar{i} - 13\bar{j} + 4\bar{k}$$

Вычисляем длину вектора

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{36 + 169 + 16} = \sqrt{221} = 14.866$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} 14.866 = 7.433$$

Замечание. Из определения векторного произведения следует, что векторное произведение равно 0, если перемножаемые вектора коллинеарные.

7. Смешанное произведение.

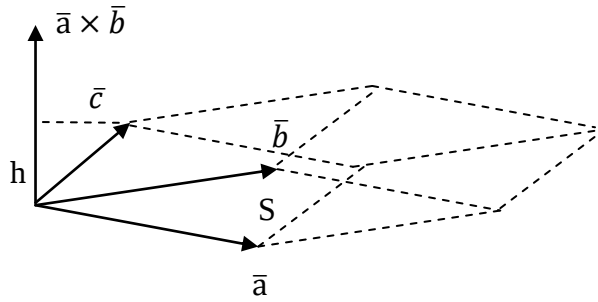
В смешанном произведении участвуют три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а в результате получается число. Первые два вектора перемножаются путем векторного произведения, а результат векторного произведения уже скалярно умножается на третий вектор.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Векторное произведение обладает следующим свойством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}$$

Геометрически, векторное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятого со знаком «+», если тройка векторов правая и «-», если тройка левая.



$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{a} \times \bar{b}} \bar{c} = S \cdot h$$

Замечание. Объем тетраэдра, который построен на трех векторах (соединяем концы векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$), равен шестой часть объема параллелепипеда. Поэтому объем тетраэдра равен

$$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{1}{6} |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}|$$

Смешанное произведение векторов в координатах векторов.

Пусть перемножаемые вектора имеют следующие координаты $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Определение и условие компланарности векторов.

Вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называют компланарными, если они лежат в одной или в параллельных плоскостях.

Из определения смешанного произведения следует условие компланарности векторов.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$$

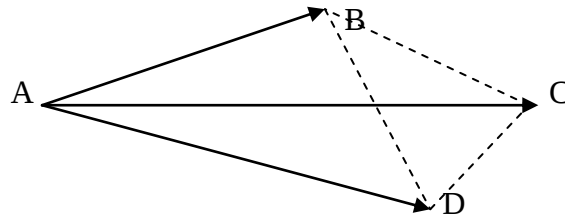
или в координатах

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Условие принадлежности четырех точек плоскости.

Очевидно, что через три точки всегда можно провести плоскость. Для четырех точек это не так, т.е. четыре точки могут и не лежать на одной плоскости (вершины тетраэдра). Рассмотрим условие того,

что четыре точки лежат в одной плоскости. Пусть даны произвольные четыре точки A, B, C, D . Построим по ним три вектора $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.



Очевидно, что принадлежность четырех точек одной плоскости это есть то же самое, что компланарность векторов по ним построенным, т.е.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

Если задать координаты точек $A(a_x, a_y, a_z), B(b_x, b_y, b_z), C(c_x, c_y, c_z), D(d_x, d_y, d_z)$, то получаем условие того, что четыре точки лежат в одной плоскости.

$$\begin{vmatrix} b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \\ d_x - a_x & d_y - a_y & d_z - a_z \end{vmatrix} = 0$$

Если четыре точки не лежат в одной плоскости, то по ним можно построить тетраэдр и объем этого тетраэдра будет равен

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \\ d_x - a_x & d_y - a_y & d_z - a_z \end{vmatrix} \right|$$

Пример. Даны четыре точки $A(-1,3,2), B(2, 1, 0), C(1,3,5), D(3, -1, 2)$. Проверить лежат ли они на одной плоскости и если не лежат, то найти объем тетраэдра, построенного на этих точках.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -24 + 16 + 36 = 28 \neq 0$$

Точки не лежат на одной плоскости. Объем тетраэдра, построенного на этих точках равен

$$V = \frac{1}{6} \cdot 28 = \frac{14}{3} = 4.6(6)$$