



$SA = SB = m$ – образующие конуса, через которые проведена плоскость, пересекающая основание по хорде AB , и образующая с основанием конуса угол β . O – центр конуса, $OA = OB = r$ – радиусы основания конуса, $\angle AOB = \alpha$. Т.к. боковая поверхность конуса считается по формуле

$$S = \pi r m \quad (1),$$

где r – радиус основания конуса, а m – его образующая, то нужно неизвестный радиус r выразить через известную образующую m . SO – высота конуса, которая определяется через образующую m и радиус основания r по формуле

$$SO = \sqrt{m^2 - r^2}.$$

Из вершины конуса S проведём перпендикуляр SH к хорде AB , OH – проекция SH на плоскость основания конуса, и по теореме о трёх перпендикулярах $OH \perp AB$, а $\angle SHO$ – угол между основанием и плоскостью ASB : $\angle SHO = \beta$.

$$SH = \frac{SO}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{m^2 - r^2}}{\sin \beta}.$$

По теореме Пифагора

$$\begin{aligned} AH^2 + SH^2 &= SA^2 \Leftrightarrow AH^2 = SA^2 - SH^2 \Leftrightarrow AH^2 = m^2 - \frac{m^2 - r^2}{\sin^2 \beta} \Leftrightarrow \\ AH^2 &= \frac{m^2 \sin^2 \beta - m^2 + r^2}{\sin^2 \beta} \Rightarrow AH^2 = \frac{r^2 - m^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (2).$$

OH – высота равнобедренного треугольника ($OA = OB = r$) к основанию AB , а значит, и его биссектриса, значит $\angle AOH = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AH = OA \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow AH = r \sin \frac{\alpha}{2}$ и

$$AH^2 = r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (3).$$

Приравнявая AH^2 из (2) и (3) получим:

$$\begin{aligned} \frac{r^2 - m^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} &= r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow r^2 - m^2 \cos^2 \beta = r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \right) &= m^2 \cos^2 \beta \Rightarrow r = \frac{m \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta}} \text{ и} \end{aligned}$$

$$S = \frac{\pi m^2 \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta}}.$$