

<http://znaniya.com/task/20980644>

Вершина параболы лежит в конце одного из диаметров окружности.

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (1)$$

Составить уравнение параболы, если общая хорда параболы и окружности лежит на прямой

$$y - 2 = 0 \quad (2).$$

РЕШЕНИЕ.

Вначале находим точки пересечения хорды и окружности. Из уравнения прямой, на которой лежит хорда, находим

$$y = 2 \quad (3)$$

Подставим (3) в уравнение окружности (1) и найдем абсциссы точек пересечения хорды с окружностью.

$$x^2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 = 5$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{5} \quad (4)$$

Итого есть координаты двух точек, которые принадлежат искомой параболе и заданной окружности.

$$A = (-\sqrt{5}; 2) \quad (5)$$

$$B = (\sqrt{5}; 2)$$

Далее общее уравнение параболы без поворота имеет вид:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (6)$$

При этом нам пока неизвестны коэффициенты a, b, c .

Поскольку точки (5) принадлежат параболе, то их координаты должны превращать выражение (6) в верное равенство. Подставим (5) в (6), получим 2 уравнения с 3-мя неизвестными a, b, c .

$$\begin{cases} 5a - b\sqrt{5} + c = 2 \\ 5a + b\sqrt{5} + c = 2 \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку правые части уравнений в (7) равны между собой мы можем приравнять и левые части.

$$5a - b\sqrt{5} + c = 5a + b\sqrt{5} + c$$

Проводи все возможные сокращения и получаем

$$-b = b \quad (8)$$

Чтобы (8) выполнялось необходимо, чтобы

$$b = 0 \quad (9)$$

Т. е. теперь с учетом (9) уравнение искомой параболы мы можем записать в виде

$$y = ax^2 + c \quad (10)$$

Замечаем, что координата x вершины параболы определяется как

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (11)$$

Значит, согласно (9)

$$x_0 = 0 \quad (12)$$

Т.е. Вершина расположена на оси Y .

Поскольку из условия известно, что вершина параболы лежит в конце одного из диаметров окружности, т. е. на линии окружности, координаты вершины параболы должны удовлетворять уравнению окружности (1). Подставим значение x_0 в (1) и найдем соответствующую координату y .

$$y^2 = 9$$

Получается 2 возможных варианта.

$$y_{1,2} = \pm 3 \quad (13)$$

Рассмотрим случай

$$y_1 = 3 \quad (14).$$

Подставим найденные координаты вершины (12), (14) в уравнение параболы (10).

$$3 = a \cdot 0^2 + c$$

Находим коэффициент c .

$$c = 3 \quad (15)$$

Далее подставим в уравнение параболы (10) найденное значение коэффициента c (15) и координаты точки А (5).

$$2 = a \cdot 5 + 3$$

Отсюда находим коэффициент a .

$$a = -\frac{1}{5} \quad (16)$$

Таким образом найдено одно возможное уравнение параболы

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + 3 \quad (17)$$

Аналогично рассматривается случай

$$y_2 = -3 \quad (18)$$

$$c = -3 \quad (19)$$

$$2 = 5a - 3$$

$$a = 1 \quad (20)$$

Получили 2-е возможное уравнение параболы

$$y = x^2 - 3 \quad (21)$$

NB. Возможно при рассмотрении «повёрнутых» парабол можно было найти ещё что-то, но думаю двух нам хватит :)

ОТВЕТ.

Как минимум два уравнения разных параболы удовлетворяют условиям задачи.

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$$

$$y = x^2 - 3$$

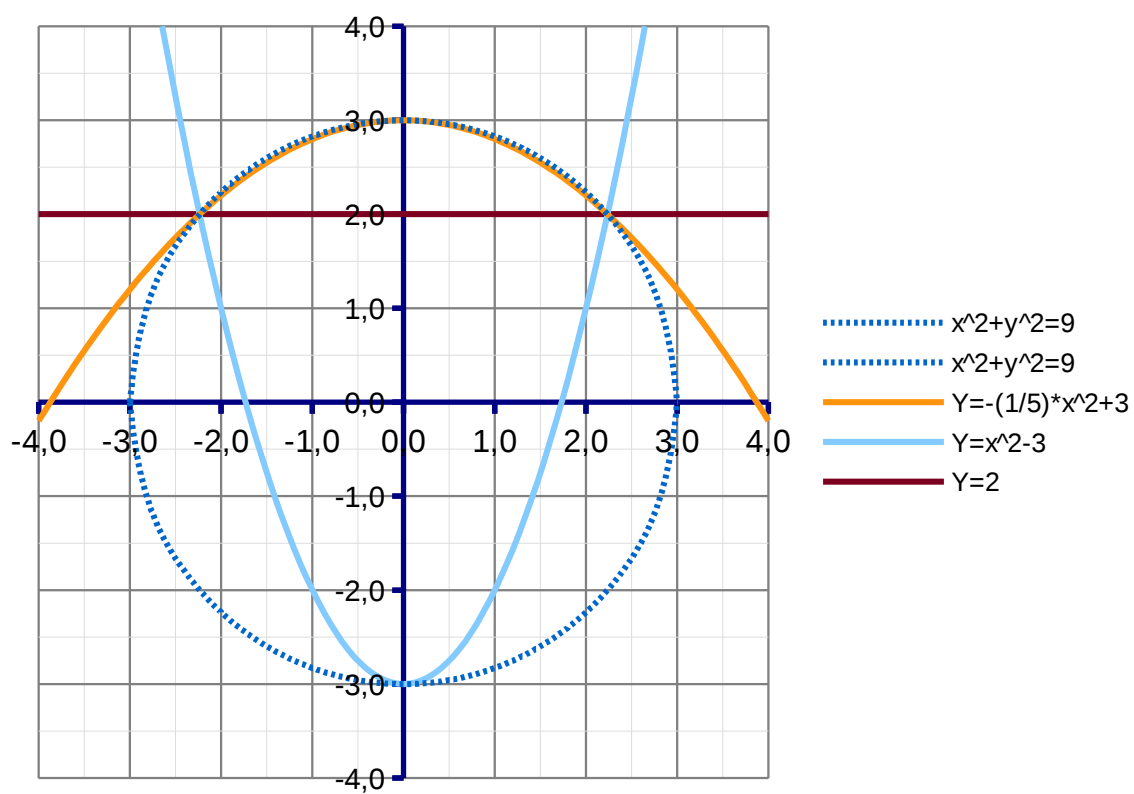


Рисунок 1: Окружность и параболы с общей хордой