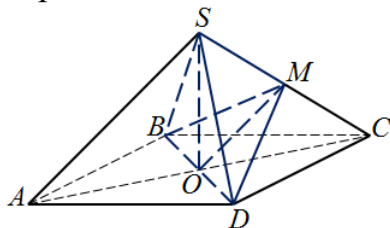


В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна 18 см. Плоскость сечения проходит через диагональ BD и перпендикулярна ребру SC . Вычислите объём пирамиды, вершиной которой является точка S , а основанием – сечение данной пирамиды.



Т.к. все рёбра пирамиды $SABCD$ равны между собой, то боковые грани этой пирамиды – правильные треугольники со стороной 18 см, а основание – по крайней мере – ромб с такой же стороной. SO – высота пирамиды, т.е. O – проекция вершины пирамиды S на плоскость основания, OA , OB , OC и OD – проекции боковых рёбер SA , SB , SC и

SD соответственно на плоскость основания. Т.к. по условию $SA = SB = SC = SD$, то $OA = OB = OC = OD$ как проекции равных наклонных, т.е. OA , OB , OC и OD – радиусы окружности, описанной около основания $ABCD$. В четырёхугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 180° , а т.к. в ромбе противоположные углы равны, то все углы основания $ABCD$ равны 90° , т.е. $ABCD$ – квадрат, и $BD = 18\sqrt{2}$ см, как диагональ квадрата.

На ребре SC отметим точку M такую, что $SM = MC = 9$ см. Тогда BM и DM – медианы, а значит, и высоты правильных треугольников BCS и DCS соответственно, поэтому:

$$1) \quad BM = DM = \frac{SC\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ см.}$$

2) $SC \perp BM$ и $SC \perp DM \Rightarrow SC \perp (BMD)$, т.е. $\triangle BMD$ – сечение, проходящее через диагональ BD перпендикулярно ребру SC .

Пирамида, объём которой требуется найти – это пирамида $SBDM$ с боковыми рёбрами SB , SD и SM (а т.к. $SM \perp (BMD)$, то SM – ещё и высота пирамиды $SBDM$) и основанием BMD .

$\triangle BMD$ – равнобедренный ($BM = DM$), $BO = OD = \frac{BD}{2} = 9\sqrt{2}$ см (O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$). Значит, MO – медиана и высота треугольника BMD .

$$\text{По теореме Пифагора } MO = \sqrt{BM^2 - BO^2} = \sqrt{(9\sqrt{3})^2 - (9\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ см.}$$

$$\text{Площадь треугольника } BMD: S_{\triangle BMD} = \frac{BD \cdot MO}{2} = \frac{18\sqrt{2} \cdot 9}{2} = 81\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

$$\text{Объём пирамиды } SBDM: V_{SBDM} = \frac{1}{3} S_{\triangle BMD} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot 81\sqrt{2} \cdot 9 = 243\sqrt{2} \text{ см}^3.$$