

$$(x^2-10x)^2+8(x-5)^2-209=0$$

$$(x^2-10x)^2+8(x-5)^2-209=0$$

$$(x^2-10x)^2+8(x^2-10x+25)-209=0$$

Произведем замену переменных.

Пусть $t=x^2-10x$

В результате .

$$t^2+8(t+25)-209=0$$

$$t^2+(8t+200)-209=0$$

$$t^2+8t+200-209=0$$

$$t^2+8t-9=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=8^2-4\cdot 1\cdot (-9)=100$$

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения.

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1=\frac{-8-10}{2\cdot 1}=-9; t_2=\frac{-8+10}{2\cdot 1}=1$$

исходное уравнение сводится к уравнениям

$$x^2-10x=-9$$

$$x^2-10x=1$$

Решаем каждое отдельно

1 .

$$x^2-10x=-9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Находим дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{10-8}{2 \cdot 1} = 1; x_2 = \frac{10+8}{2 \cdot 1} = 9$$

2 .

$$x^2 - 10x = 1$$

$$x^2 - 10x - 1 = 0$$

Находим дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 104$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{10-2\sqrt{26}}{2 \cdot 1} = 5-\sqrt{26}; x_2 = \frac{10+2\sqrt{26}}{2 \cdot 1} = 5+\sqrt{26}$$

ответ: $x=5-\sqrt{26}; x=1; x=9; x=5+\sqrt{26}$.