Лекция №4

Собственные значения и собственные вектора матрицы.

1. Определение.

Пусть задана матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и вектор столбец

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Если матрицу умножить на вектор, то получится новый вектор Y

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}$$

Поэтому, матрицу A можно рассматривать как некоторое преобразование вектора X в новый вектор Y.

Число λ называется собственным значением матрицы A, если существует ненулевой вектор X, для которого выполняется

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \lambda \cdot \boldsymbol{X}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Вектор X, в этом случае называется собственным вектором. Другими словами собственный вектор преобразуется матрицей в себе коллинеарный вектор.

Так как единичная матрица $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не изменяет вектор при умножении, то последнее равенство можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Перенеся правую часть влево, получаем

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

или, в матричной форме

$$(A-\lambda E)\cdot X = 0$$

Матрица

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

называется характеристической матрицей.

Для нахождения характеристического вектора надо решить однородную систему линейных уравнений (получается из выражения «*»)

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Матрица коэффициентов этой системы – это характеристическая матрица. Если определитель этой матрицы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, очевидно, это решение нулевой. Что бы система имела не нулевые решения, надо чтобы определитель был равен нулю. Т.е. получаем условие для нахождения характеристического значения.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Или, в более краткой форме

$$|A-\lambda E| = 0$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением.

Пример. Найти собственные значения и собственные вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Условие для нахождения характеристического значения

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda)^2 - 3 - 3 - (4-\lambda) + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) = 0$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 18 = 0$$

Преобразуем выражение

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 7\lambda^2 + 7\lambda + 18\lambda - 18 = 0$$

или

$$\lambda^2(\lambda-1) - 7\lambda(\lambda-1) + 18(\lambda-1) = 0$$

Вынесем общий множитель за скобки. Тогда получим уравнение

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2 - 7\lambda + 18\right) = 0$$

Произведение равно нулю, когда один из сомножителей равен нулю. Заметим, что второй сомножитель в ноль не обращается, так как дискриминант меньше нуля. Поэтому, характеристическое уравнение имеет всего один действительный корень.

$$\lambda = 1$$

Для нахождения собственного вектора подставим это собственное значение в систему(**).

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Второе и третье уравнения одинаковые, первое разделим на 3. Поэтому систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Сложим оба уравнения, а затем из второго вычтем первое. Получим

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Имеем собственный вектор

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{x_2} \\ -\boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$